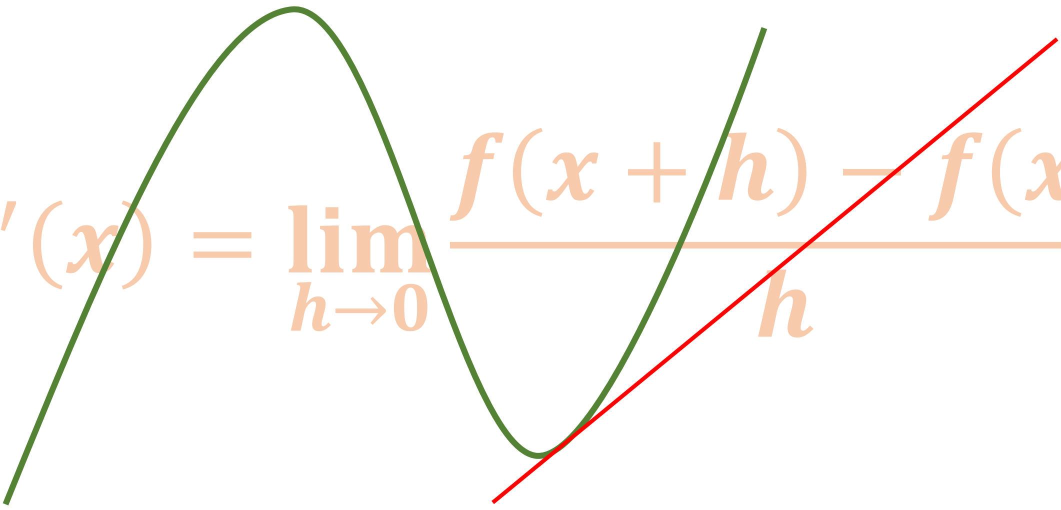
គណិតវិទ្យាគណនា១



$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

រៀបរៀងដោយ៖ គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយ៖

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

គណៈកម្មការនិពន្ធ៖ លោក ជុំ វាសនា

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក	ឯក លីម	ប្រធាន
២. លោក	ជា សុទ្ធ	សមាជិក
៣. លោក	សួស សុភាព	សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឬសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣%នៅឆ្នាំ ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្រប់ដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជាដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយ មានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពង់បន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពមនុស្ស។ផ្ទុយទៅវិញប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាព្រិកកំពង់ស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវ ជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូវនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោកក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំងពីរនេះមានមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃវិនិយោគទុនសរុបរបស់ពិភពលោក។អតិកម្ម

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទា ក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជា មូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ធាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយ ពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍ នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំនិងការចែករំលែកចំណេះដឹង។មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែល

សៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។ វិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំនិងការចែករំលែកចំណេះដឹង។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារ-គមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវមជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្អែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំមានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន ៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍ អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយ សំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជា បច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំ ឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិបទនៃការរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេ អេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចម្រុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យនិងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះនិងការចុះទៅជួបសិស្សជាបណ្តុំតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀតដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា«មូលនិធិ សន.គ.»និងជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា "RCI Fund"។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ សន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ .គ. ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិធំចំនួន៣ រួមមានឌីជីថលយនកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម ៤.០ (Digitalization for IR.4.0)

ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា)Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិត នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតែម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួម ដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់

នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

គណិតវិទ្យាគណនា ១

មាតិកា

អារម្ភកថា

សៀវភៅ " **គណិតវិទ្យាគណនា ១**" ដែលលោក អ្នកកំពុងកាន់នៅដៃនេះ បានរៀបរៀងឡើង ដើម្បី ឆ្លើយតបទៅនឹងសេចក្តីត្រូវការរបស់គរុនិស្សិត និង អ្នកស្រាវជ្រាវដែលមានបំណងសិក្សា និងស្រាវជ្រាវ ដោយប្រើភាសាជាតិ ។ការរៀបរៀងឡើងគឺ ដើម្បីជំនួយដល់ការបង្រៀនរបស់សាស្ត្រាចារ្យ និងការសិក្សារបស់គរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យាឆ្នាំងទី១ នៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ។ ក្នុងសៀវភៅនេះ គឺយើងអាចស្វែងរកបាននូវឧទាហរណ៍ល្អៗ និងលំហាត់ល្អៗជាច្រើនដែលបង្ហាញនូវ ទ្រឹស្តី និងទិចនិច ដែលស្របតាមគំរូនៃការអនុវត្តបែបទាន់សម័យ និងប្រើវិធីផ្សេងៗគ្នា។ក្នុងសៀវភៅនេះ និយាយផ្តោតទៅលើ អនុគមន៍ ក្រាបនៃអនុគមន៍ លីមីត និង ការអនុគមន៍លីមីត។

ការអនុវត្តនៃការគណនាក្នុងសៀវភៅនេះបានផ្តល់អោយយើងស្គាល់នូវទំនាក់ទំនងជាច្រើនដែលផ្សារ ភ្ជាប់ជាមួយមុខវិជ្ជាផ្សេងទៀតយ៉ាងជិតស្និទ្ធដូចជា ប្រូបាប៊ីលីតេ ជីវវិទ្យា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជំនួញ ពាណិជ្ជកម្ម វិស្វកម្ម និងវិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រជាដើម។

យើងខ្ញុំ ទាំងអស់គ្នាសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងរួមចំណែកផ្តល់នូវចំណេះដឹងក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវ លើមុខវិជ្ជា គណនាឆ្នាំទី១។

យើងរង់ចាំដោយរីករាយទទួលនូវការរិះគន់ស្ថាបនាអំពីមិត្តអ្នកអាន គ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីជួយកែលំអរសៀវភៅនេះអោយកាន់តែមានភាពសុក្រិតថែមមួយកំរិតទៀត ឆ្លើយតបនឹងពេលវេលាផង ព្រមទាំងសមត្ថភាព របស់និស្សិតផង។

យើងសូមជូនពរអោយមិត្តអ្នកអានជាបុគ្គលដែលមានជោគជ័យ គ្រប់ពេលវេលា។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ " **គណិតវិទ្យាគណនា ១**" ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន ព្រមទាំងការចូលរួមរបស់គរុសិស្ស និងគរុនិស្សិតផងដែរ។

យើងខ្ញុំ/ខ្ញុំបាទ/នាងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា "មូលនិធិ ស.គ.ន»។
- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា "មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិត 1 ច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតប ទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។
- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និង កែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Textbook) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណលើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិត ដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។
- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត/ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។
- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួត ពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។
- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀង ក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រម ព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវ ស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និង ប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅ កម្រិតឧត្តមសិក្សាក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។
- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ ដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗ ឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

យើងខ្ញុំ/ខ្ញុំបាទ/នាងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធាន សិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

មុខវិជ្ជា″ គណិតវិទ្យាគណនា ១″ គឺត្រូវបានសរសេរឡើងស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រគ្រូបង្រៀន ១២+៤ ផ្នែកគណិតវិទ្យា ក្នុងគោលបំណងជួយគរុនិស្សិតក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវលើមូលដ្ឋាន ទាក់ទងនឹងលំហាត់គណនា ផ្សារភ្ជាប់នឹងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។

សិស្សត្រូវបានរំពឹងថានឹងប្រើប្រាស់ចំណេះដឹង និងការអនុវត្តគណិតវិទ្យារបស់ពួកគេដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហា។ សៀវភៅសិក្សានេះពង្រឹងការយល់ដឹងរបស់សិស្សអំពីមុខងារក្នុងការរៀបចំសម្រាប់ដំណើរការនៃភាពខុសគ្នា និងការរួមបញ្ចូល។ ខ្លឹមសារក្នុងសៀវភៅនេះមានដូចតទៅះ

មេរៀនទី១ អនុគមន៍ និងគម្រូ

ក្នុងមេរៀននេះ និស្សិតកំណត់បាននូវ វិធីសាស្ត្របួនយ៉ាងក្នុងការតាងអនុគមន៍ គម្រូគណិតវិទ្យាៈ គម្រូនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ អនុគមន៍ថ្មីបង្កើតដោយអនុគមន៍ចាស់ និងការគូសក្រាបដោយប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីន និងកុំព្យូទ័រ។ និស្សិតអនុវត្តមានលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មេរៀនទី២៖ លីមីត និង ដេរីវេ

ក្នុងមេរៀននេះ និស្សិតកំណត់បានខ្លឹមសារ ដែលទាក់ទងនឹង លីមីត និងដេរីវេ តង់សង់ និង ល្បឿន ការគណនា និង ការប្រើប្រាស់ច្បាប់លីមីត ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ លីមីតត្រង់អនន្ត និង អាស៊ីមតូតដេក ដេរីវេ និង អត្រាបម្រែបម្រួល និង ដេរីវេនៃអនុគមន៍។និស្សិតអនុវត្តមានលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មេរៀនទី៣ ច្បាប់ដេរីវេ

ក្នុងមេរៀននេះ និស្សិតកំណត់បានខ្លឹមសារ ដែលទាក់ទងនឹង ដេរីវេនៃអនុគមន៍ពិសេសមួយចំនួន និងការអនុវត្តរបស់វា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ពហុធា និងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ច្បាប់នៃផលគុណនិងផលចែក ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងឌីផេរ៉ង់ស្យែល អ៊ីព្លីស៊ីត (Implicit Differentiation)។ និស្សិតអនុវត្តលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មូលន័យសង្ខេប

យើងឃើញថា គំនិតនៃដែនកំណត់មួយកើតឡើងនៅក្នុងការព្យាយាមស្វែងរកផ្ទៃក្រឡា,

មេគុណបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង ល្បឿននៃរថយន្ត ឬផលបូកនៃស៊េរីគ្មានកំណត់។ យើងមាន ម៉ូដែលជាច្រើនដែលកំណត់បានជាអនុគមន៍គណិតវិទ្យា ហើយអនុគមន៍នេះនឹងត្រូវបានយកមកសិក្សា និងអនុវត្តរបស់វា។គោលគំនិតនៃការគណនាដែលបានរកឃើញរួមមានដែនកំណត់ អនុគមន៍ លីមីតនិងភាពជាប់ អាំងតេក្រាលច្បាស់លាស់ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងបច្ចេកទេសនៃការរួមបញ្ចូល។ ការសង្កត់ធ្ងន់ត្រូវបានដាក់លើការស្វែងរកកម្មវិធីគណនាក្នុងពិភពពិត សិស្សត្រូវបានរំពឹងថានឹងរៀនជ្រើសរើស និងប្រើប្រាស់គណិតវិទ្យា ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។ ករណីដែលប្រធានបទទូទៅគឺការគណនាបរិមាណដែលជាដែនកំណត់នៃបរិមាណផ្សេងទៀតដែលងាយស្រួលគណនា។ វាគឺជាគំនិតជាមូលដ្ឋាននៃដែនកំណត់ដែលកំណត់ការគណនាខុសពីផ្នែកផ្សេងទៀតនៃ

គណិតវិទ្យា។ តាមពិតយើងអាចកំណត់ការគណនាជាផ្នែកនៃគណិតវិទ្យាដែលទាក់ទងនឹងដែនកំណត់។

បន្ទាប់ពី Sir Isaac Newton បានបង្កើតកំណែគណនារបស់គាត់ គាត់បានប្រើវាដើម្បីពន្យល់ពីចលនា

នៃភពជុំវិញព្រះអាទិត្យ។ សព្វថ្ងៃនេះ ការគណនាត្រូវបានប្រើប្រាស់ក្នុងការគណនាគន្លងរបស់ផ្កាយរណប

និងយានអវកាស ក្នុងការទស្សន៍ទាយទំហំប្រជាជន ក្នុងការប៉ាន់ប្រមាណថាតើតម្លៃកាហ្វេកើនឡើងលឿនប៉ុណ្ណា

ការព្យាករណ៍អាកាសធាតុ ក្នុងការវាស់ស្ទង់ទិន្នផលបេះដូងនៃបេះដូង ការគណនាបុព្វលាភធានារ៉ាប់រងអាយុជីវិត និងក្នុងវិស័យជាច្រើនផ្សេងទៀត។ យើងនឹងស្វែងយល់ពីការប្រើប្រាស់មួយចំនួន

នៃការគណនានៅក្នុងសៀវភៅនេះ។

មេរៀនទី១ អនុគមន៍ និងគម្រូ

មូលដ្ឋានគ្រឹះដែលគេអាចដោះស្រាយអនុគមន៍នៅក្នុងការគណនា ។ ជំពូកនេះនឹងរៀបរៀងពីវិធីសាស្ត្រដោយពិភាក្សាទៅលើការគណនាអនុគមន៍មានដូចជា៖ ក្រាបនៃអនុគមន៍ ហើយនឹងវិធីសាស្ត្របម្លែង និងការបញ្ចូលគ្នានៃអនុគមន៍ ។ គេផ្តោតសំខាន់ទៅលើអនុគមន៍ដែលអាចតាងនៅក្នុងវិធីសាស្ត្រផ្សេងៗដូចជា៖ សមីការ តារាង ក្រាប ឬក៏ពាក្យ ។ គេមើលទៅលើប្រភេទនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ ដែលអាចកើតមាននៅក្នុងការគណនា និងការពណ៌នាពីដំណើរការនៃការប្រើប្រាស់អនុគមន៍ទាំងនេះ ដូចជា នៅក្នុងគណិតវិទ្យានៃបាតុភូតក្នុងពិភពលោក ហើយគេក៏អាចពិភាក្សាពីការប្រើប្រាស់ក្រាបសម្រាប់ការគណនាម៉ាស៊ីន និងក្រាបសម្រាប់ software កុំព្យូទ័រ ។

១.១. វិធីសាស្ត្របួនយ៉ាងក្នុងការតាងអនុគមន៍

អនុគមន៍កើតមាននៅពេលដែលចំនួនមួយ អាស្រ័យលើចំនួនមួយផ្សេងទៀត ។ គេវិភាគលើស្ថានភាពទាំងបួនដូចខាងក្រោម៖

1. ផ្ទៃក្រឡា A របស់រង្វង់អាស្រ័យទៅនឹងកាំ r នៃរង្វង់ ។ ទំនាក់ទំនងរវាង A និង r ត្រូវបានឲ្យដោយសមីការ $A=\pi r^2$ ។ តម្លៃវិជ្ជមាននៃ r ទាក់ទងទៅនឹងតម្លៃមួយនៃ A ហើយគេអាចនិយាយបានថា A ជាអនុគមន៍នៃ r ។

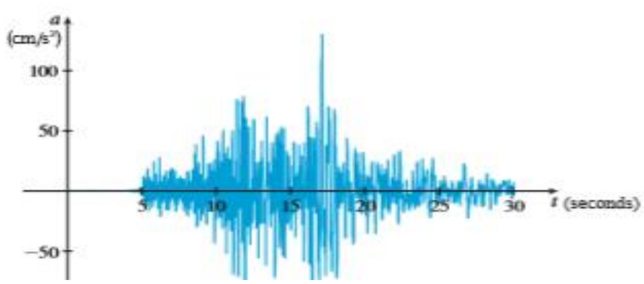
   ចំនួនប្រជាជនពិភពលោកតាងដោយ P អាស្រ័យនឹងពេល t ។ តារាងដែលបានផ្តល់ឲ្យបង្ហាញពីការប៉ាន់ស្មាននៃចំនួនប្រជាជនពិភពលោកតាងដោយ $P(t)$ នៅរយៈពេល t សម្រាប់ឆ្នាំជាក់លាក់ ។

   ឧទាហរណ៍៖ $P(1950)\approx 2,560,000,000$ ក៏ប៉ុន្តែតម្លៃនីមួយៗនៃពេល t ត្រូវគ្នានឹងតម្លៃនៃ P ហើយគេអាចនិយាយបានថា P ជាអនុគមន៍នៃ t ។

ឆ្នាំ	ប្រជាជន គិតជាលាន
1900	1650

1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

2. តម្លៃ C នៃស្រោមសំបុត្រមួយអាស្រ័យទៅនឹងទម្ងន់របស់វាតាងដោយ w ។ ទោះបីជាគ្មានរូបមន្តដែលទាក់ទងទៅនឹងគ្នារវាង w និង C ក៏ការិយាល័យប្រៃសណីយមានវិធីសម្រាប់កំណត់តម្លៃ C ពេលដឹង w ។
សំទុះទំនាញដី a ត្រូវបានវាស់ដោយក្រាប seismo មួយអំឡុងពេលរញ្ជួយដីជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល t ។ រូបភាពទី 1 បានបង្ហាញពីក្រាបដែលកើតឡើងពីសកម្មភាពរញ្ជួយដីអំឡុងពេលរញ្ជួយដីនៅ Northbridge ដែលធ្វើឲ្យញ័ររដ្ឋ Los Angeles ក្នុងឆ្នាំ 1994 ។ ចំពោះការឲ្យតម្លៃ t ត្រូវមានតម្លៃត្រូវគ្នាទៅនឹងតម្លៃ a ។



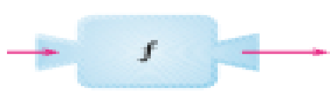
(រូបភាពទី1: ក្រាបដែលកើតឡើងពីសកម្មភាពរញ្ជួយដី នៅ Northbridge)

ក្នុងឧទាហរណ៍នីមួយៗបានបង្ហាញពីវិធីនៃការឲ្យតម្លៃលេខនៃ (r,t,w,t) ចំណែកតម្លៃលេខ (A,P,C,a) ត្រូវបានតាង។ ក្នុងន័យនេះ គេអាចនិយាយបានថាតម្លៃលេខទី2 ជាអនុគមន៍មួយនៃតម្លៃលេខទី1 ។

ជាទូទៅ : អនុគមន៍ f គឺជាវិធីមួយនៃការតាងអថេរមួយគឺ x នៅក្នុងដែនកំណត់ D មួយជាក់លាក់ នៅក្នុងអថេរមួយទៀតដែលគេហៅថា $f(x)$ ។

យក D គឺជាដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ ។ $f(x)$ ជាតម្លៃនៃ x នៅក្នុង f ហើយគេអានថា " f នៃ x " ។ អក្សរ x ត្រូវបានហៅថា តម្លៃមិនអាស្រ័យ ។ អក្សរតាងឲ្យតម្លៃមួយក្នុងនៃអនុគមន៍ f ត្រូវបានហៅថា តម្លៃអាស្រ័យ ។

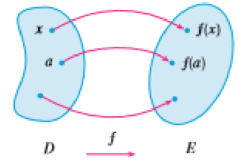
ជាជំនួយដល់ការគិតពីអនុគមន៍មួយប្រៀបដូចជាម៉ាស៊ីនមួយចឹង (មើលរូបភាពទី 2)។ ប្រសិនបើ x នៅក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f បន្ទាប់ x ត្រូវបានបញ្ចូលទៅក្នុងម៉ាស៊ីនវាត្រូវបានទទួលប្រៀបដូចជាជាតុចូល ហើយម៉ាស៊ីនផលិតជាតុចេញ $f(x)$ ផ្អែកទៅលើវិធីសាស្ត្រនៃអនុគមន៍ ។

ចូល  ចេញ

(រូបភាពទី2: អនុគមន៍)

វិធីម្យ៉ាងទៀតក្នុងការតាងរូបភាពនៃអនុគមន៍មួយគឺតាងដ្យាក្រាមបំព្រួញ (ដូចក្នុងរូបទី3) ។ ព្រួញនីមួយៗភ្ជាប់អថេរមួយនៃដែន D ទៅនឹងអថេរនៃដែន E ។ គំនូសបំព្រួញបង្ហាញថា $f(x)$ គឺទាក់ទងទៅនឹង x និង $f(a)$ ទាក់ទងទៅ a ហើយមានទំនាក់ទំនងផ្សេងៗទៀត ។

(រូបភាពទី3: អនុគមន៍ f)

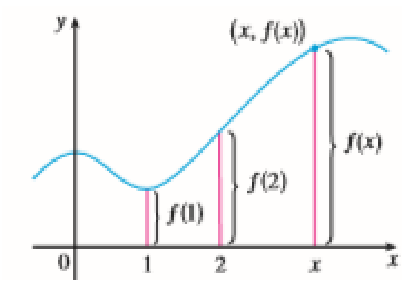


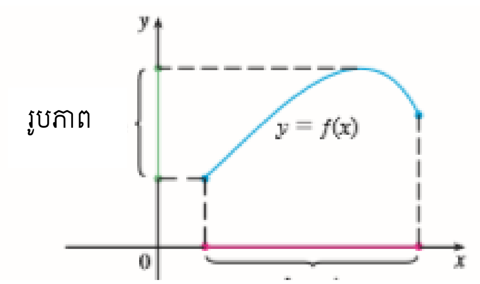
ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍មួយដែលទាក់ទងជាមួយនឹងដែនកំណត់ D ហើយក្រាបរបស់វាគឺកំណត់ដោយគូ x និង $f(x)$ កំណត់ដោយ

$$\{(x, f(x)) / x \in D\}$$

សម្គាល់៖ គូនៃ $(x, f(x))$ ក្នុងន័យផ្សេងទៀតក្រាបនៃអនុគមន៍ f មានគ្រប់ចំណុច (x, y) នៅក្នុងប្លង់កូអរដោនេដែល $y = f(x)$ ហើយ x នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f ។

y នៃប្លង់កូអរដោនេនៃចំណុចខ្លះ (x, y) នៅលើក្រាបគឺ $y = f(x)$ គេអាចអាននូវតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ពីក្រាបដូចជាកម្ពស់នៃក្រាបនៅចន្លោះរវាងចំណុច x (មើលរូបភាពទី4) ។ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក៏អាចឲ្យគេបង្កើតនូវរូបភាពនៃដែនកំណត់នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយវាមានរូបភាពនៅលើអ័ក្សអរដោនេផងដែរ (រូបភាពទី 5) ។



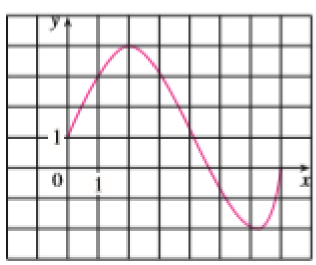


(រូបភាពទី4: របៀបសង់ក្រាប) (រូបភាពទី5: ក្រាបពេញ)

ឧទាហរណ៍ទី 1 : ក្រាបនៃអនុគមន៍ f មួយ គឺបង្ហាញក្នុង (រូបភាពទី6)

$a.)$ គណនាតម្លៃនៃ $f(1)$ និង $f(5)$ ។

$b.)$ តើអ្វីទៅជាដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃ f ?



(រូបភាពទី6: ក្រាបក្នុងដែនកំណត់)

ឧទាហរណ៍ទី 2 : គូសក្រាប និងរកដែនកំណត់ ហើយរូបភាពនៃអនុគមន៍នីមួយៗ

a.) $f(x)=2x-1$ b.) $g(x)=x^2$

ឧទាហរណ៍ទី 3 : បើ $f(x)=2x^2-5x+1$ ហើយ $h\neq 0$ ។ គណនា $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ។

ការតាងអនុគមន៍

មាន 4 របៀបដែលអាចទៅរួចក្នុងការតាងអនុគមន៍

- ការពណ៌នា
- តារាងតម្លៃលេខ
- ក្រាប
- រូបមន្តនៅក្នុងពីជគណិត

ឧទាហរណ៍ទី 4 : នៅពេលដែលអ្នកបើកក្បាលម៉ាស៊ីនទឹកក្តៅ សីតុណ្ហភាព T នៃទឹកអាស្រ័យលើរយៈពេលដែលទឹកហូរ ។

គូសក្រាបនៃ T ជាអនុគមន៍នៃ t កន្លងទៅចាប់តាំងពីក្បាលម៉ាស៊ីនចាប់ផ្តើមបើក ។

ឧទាហរណ៍ទី 5 : ប្រលេពីប៉ែតកែងមួយបើកគម្របមានមាឌ $10m^3$ ។ ប្រវែងបណ្តោយមានប្រវែង ពីរដងនៃប្រវែងទទឹង ។ សម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើបណ្តោយមានតម្លៃ 10$ ក្នុងមួយម៉ែតការេ ហើយសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងមានតម្លៃ6$ ក្នុងមួយម៉ែត្រការេ ។ បង្ហាញថាតម្លៃសម្ភារៈជាអនុគមន៍នៃបណ្តោយ និងទទឹង ។

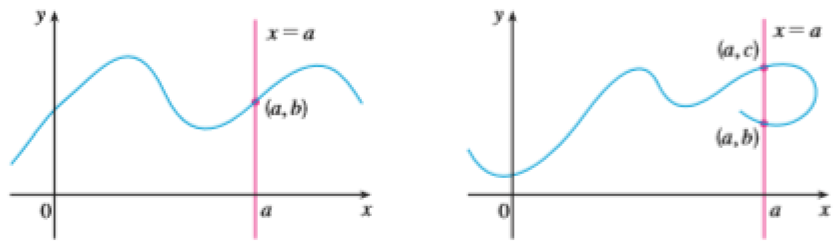
ឧទាហរណ៍ទី 6 : រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នីមួយៗ

ក. $f(x)=\sqrt{x+2}$ ខ. $g(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

ខ្សែកោងក្នុងប្លង់ xy ជាក្រាបនៃអនុគមន៍នៃ x លុះត្រាតែគ្មានបន្ទាត់ឈរណាមួយប្រសព្វខ្សែកោងនោះលើសពីមួយចំណុច ។

ប្រសិនបើបន្ទាត់ឈរនីមួយៗ $x=a$ ប្រសព្វនឹងខ្សែកោងត្រង់មួយចំណុច (a,b) នោះមានតម្លៃប្រាកដនៃអនុគមន៍នីមួយៗដែលកំណត់ដោយ $f(a)=b$ ។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើបន្ទាត់ឈរ $x=a$ ប្រសព្វនឹងខ្សែកោង

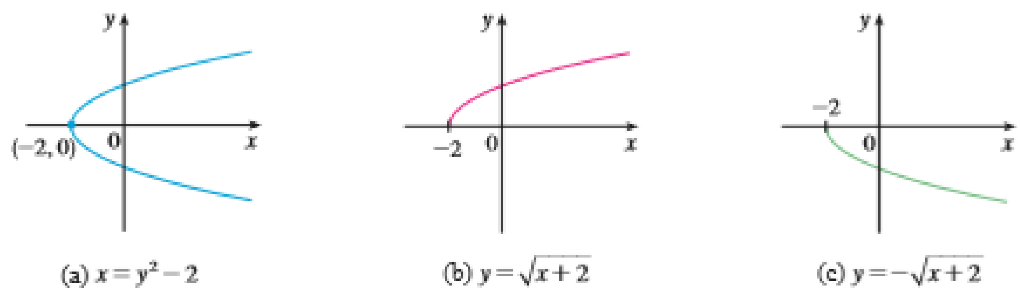
ត្រង់ពីរចំណុចគឺ (a,b) និង (a,c) នោះខ្សែកោងមិនមែនជាអនុគមន៍ទេ ព្រោះអនុគមន៍មួយមិនអាចតាងតម្លៃពីរចំពោះ a ទេ ។



(រូបភាពទី7: ប្រសព្វខ្សែកោង នឹងបន្ទាត់ $x = a$)

សមីការប៉ារ៉ាបូល $x = y^2 - 2$ បានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី14 (a) មិនមែនជាក្រាបនៃអនុគមន៍នៃ x ទេ ព្រោះដូចឃើញស្រាប់ហើយមានបន្ទាប់ឈរដែលប្រសព្វប៉ារ៉ាបូលត្រង់ពីរចំណុច ។ក្រាបដែលឡើង ចុះ ពាក់កណ្ដាលនៃប៉ារ៉ាបូលជាក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x+2}$ (ពីឧទាហរណ៍ទី6 (a)) ហើយ $g(x) = -\sqrt{x+2}$ (មើរូបភាពតី14 (a) និង (c) ។ ប្រសិនបើយើងត្រឡប់ x និង y នោះសមីការ
$x = h(x) = y^2 - 2$

កំណត់បាន x ជាអនុគមន៍នៃ y (y ជាអថេរមិនអាស្រ័យ ចំណែក x ជាអថេរអាស្រ័យ) ហើយប៉ារ៉ាបូលនឹងកើតឡើងមានក្រាបអនុគមន៍ h ។



(រូបភាពទី8: ក្រាបអនុគមន៍)

អនុគមន៍កំណត់តាមផ្នែក

ឧទាហរណ៍ទី7 អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ :

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leq -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$$

គណនាតម្លៃនៃ $f(-2), f(-1), f(0)$ រួចគូសក្រាប

ដំណោះស្រាយ

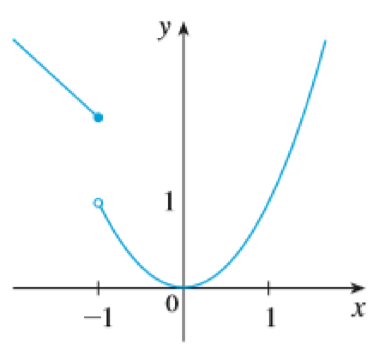
ប្រសិនបើវាកើតឡើង $x\leq -1$ នោះតម្លៃនៃ $f(x)$ គឺ $1-x$ ម្យ៉ាងវិញទៀត ប្រសិនបើ $x>-1$ នោះតម្លៃនៃ $f(x)$ គឺ x^2 ។

$-2\leq -1$ នោះយើងបាន $f(-2)=1-(-2)=3$

$-1\leq -1$ នោះយើងបាន $f(-1)=1-(-1)=2$

$0>-1$ នោះយើងបាន $f(0)=0^2=0$ ។

តើយើងគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ f បានយ៉ាងដូចម្តេច? យើងសង្កេតមើលថាប្រសិនបើ $x\leq -1$ នោះ $f(x)=1-x$ ដូច្នេះផ្នែកនៃក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដែលនៅខាងឆ្វេងនៃបន្ទាត់ឈរ $x=-1$ ត្រូវតែស្របគ្នាទៅនឹងបន្ទាត់ $y=1-x$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -1 និង $y_0=1$ ។ បើ $x>-1$ នោះ $f(x)=x^2$ ដូច្នេះក្រាបនៃអនុគមន៍ f ស្ថិតនៅខាងស្តាំនៃបន្ទាត់ $x=-1$ ត្រូវតែស្របគ្នាទៅនឹងក្រាប $y=x^2$ ដែលជាប៉ារ៉ាបូល ។ នេះអាចឲ្យយើងអាចគូសក្រាបនៅក្នុងរូបភាពទី9 ។ ចំណុចគ្មានប្រហោងបញ្ជាក់ថាចំណុច $(-1;2)$ ត្រូវបានចាត់បញ្ចូលនៅលើក្រាប ចំណែកឯចំណុចប្រហោងបញ្ជាក់ថាចំណុច $(-1;1)$ មិនចាត់បញ្ចូលនៅលើក្រាបទេ ។



(រូបភាពទី9: អនុគមន៍មានក្រាបដាច់)

ដាច់ខាតនៃ a តាងដោយ$|a|$ ជាប្រវែងពីa ទៅ0 នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិត ។ ប្រវែងតែងតែវិជ្ជមាន ឬ0ដូចនេះយើងមាន$|a|\geq 0$ ចំពោះគ្រប់a ។

ឧទាហរណ៍ $|3|$, $|-3|=3$, $|0|=0$, $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$, $|3-\pi|=\pi-3$

ជាទូទៅ : បើយើងមាន $|a| = a$ បើ$a \geq 0$

$|a| = -a$ បើ$a < 0$

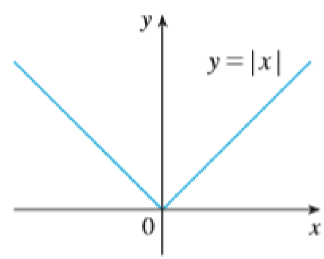
សម្គាល់៖ បើa អវិជ្ជមាន នោះ$-a$ វិជ្ជមាន

ឧទាហរណ៍ទី8 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍តម្លៃដាច់ខាត $f(x)=|x|$

ដំណោះស្រាយ

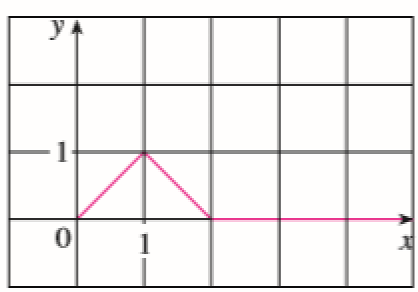
មុនពេលពិភាក្សាយើងត្រូវដឹងថា :

$$|x|=\begin{cases} x \text{ , បើ } x\geq 0 \\ -x, \text{ បើ } x<0 \end{cases}$$



(រូបភាពទី10: អនុគមន៍ដាច់ខាត)

ឧទាហរណ៍ទី9 : រកអនុគមន៍ f មួយពីក្រាបក្នុងរូបភាពទី11



(រូបភាពទី11: ក្រាប)

ដំណោះស្រាយ

បន្ទាត់ដែលមានកូអរដោនេ $(0,0)$ និង $(1,1)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=1$ ហើយ $b=0$ ដូច្នេះវាមានសមីការ $y=x$ ។

យើងមាន $f(x)=x$ បើ $0\le x\le 1$ បន្ទាត់មានកូអរដោនេ $(1,1)$ និង $(2,0)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=-1$ ដូច្នេះចំណុចប្រាប់ទិសរបស់វាមានទម្រង់គឺ

$$y-0=(-1)(x-2) \text{ ឬក៏ } y=2-x$$

ដូចនេះ យើងមាន $f(x)=2-x$ បើ $1<x\le 2$

យើងក៏ឃើញផងដែរថាក្រាបនៃអនុគមន៍ f ប្រសព្វជាមួយនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសចំពោះ $x>2$ ។ ត្រូវដាក់ពត៌មានចូលទាំងអស់ យើងមានរូបមន្តបីសម្រាប់អនុគមន៍ f :

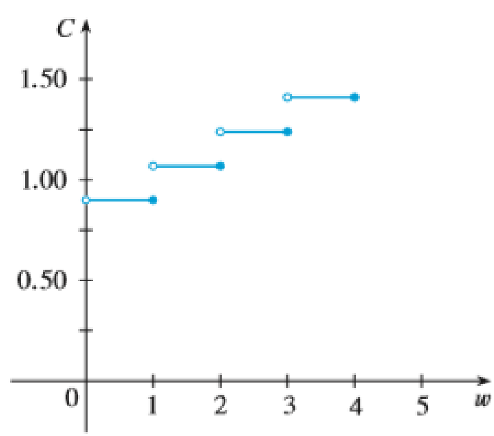
$$f(x)=\begin{cases} x\ ,\text{ បើ } 0\le x\le 1 \\ 2-x\ ,\text{ បើ } 1<x\le 2 \\ 0\ ,\text{ បើ } x>2 \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ទី10 : ក្នុងឧទាហរណ៍ c ក្នុងចំណុចចាប់ផ្តើមនៃផ្នែកនេះ យើងអាចវិភាគទៅលើតម្លៃ $C(w)$ នៃប្រអប់សំបុត្រជាមួយនឹងទម្ងន់ w ។ ព្រោះនេះជាអនុគមន៍កំណត់តាមផ្នែកពីតារាងតម្លៃលេខនៅទំព័រ13

យើងមាន : $C(w)=\begin{cases} 0.88\ ,\ 0<x\le 1 \\ 1.05,\ 1<x\le 2 \\ 1.22,\ 2<x\le 3 \\ 1,39,\ 3<x\le 4 \end{cases}$

ក្រាបត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី18 អ្នកអាចមើលថាតើហេតុអ្វីបានជាអនុគមន៍ដែលមានភាពស្រដៀងគ្នាមួយនេះត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍ជំហាន ។

ដូចនេះ អនុគមន៍នេះនឹងត្រូវសិក្សានៅជំពូក2 ។



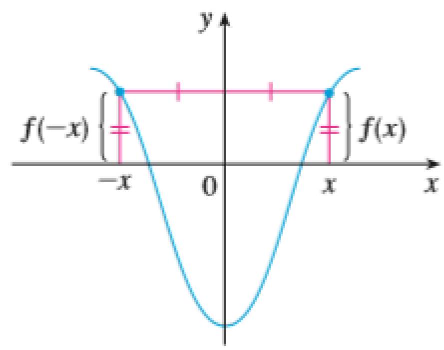
(រូបភាពទី12: អនុគមន៍ផ្នែកឬជំហ៊ាន)

ស៊ីមេទ្រី

ប្រសិនបើអនុគមន៍ f ត្រូវនឹង $f(-x)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងដែនកំណត់ នោះ f ត្រូវបានគេហៅថា **អនុគមន៍គូ** ។

ឧទាហរណ៍ $f(x)=x^2$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ ។

រូបធរណីមាត្រដែលមានសារៈសំខាន់នៃអនុគមន៍គូរមួយគឺជាក្រាបស៊ីមេទ្រីរបស់វាជាមួយអ័ក្ស y (មើលរូបភាពទី19) ។

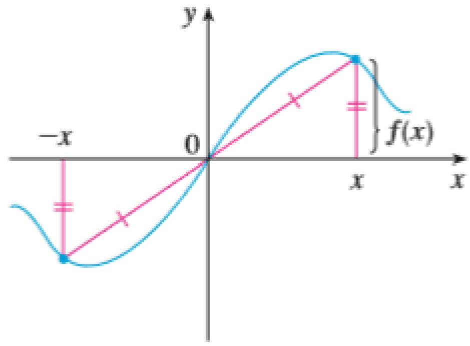


(រូបភាពទី13) អនុគមន៍គូរ

ប្រសិនបើអនុគមន៍ f ត្រូវនឹង $f(-x)=-f(x)$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងដែនកំណត់នោះអនុគមន៍ f ត្រូវបានគេហៅថា**អនុគមន៍សេស** ។ ជាឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $f(x)=x^3$ ជាអនុគមន៍សេសព្រោះ

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ ។

ក្រាបនៃអនុគមន៍សេសគឺស៊ីមេទ្រីទៅនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ដើម(មើលរូបភាពទី20) ។ ប្រសិនបើយើងមានក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចំពោះ $x\geq 0$ យើងអាចបានក្រាបទាំងមូលដោយបង្វិលផ្នែកនៃក្រាបនេះ180^0 ធៀបនឹងក្រាបដើម ។



(រូបភាពទី14) អនុគមន៍សេស

ឧទាហរណ៍ទី11 : កំណត់ថាអនុគមន៍នីមួយៗជាអនុគមន៍គូរ អនុគមន៍គូរ ឬមិនមែនជាអនុគមន៍គូមិនមែនជាអនុគមន៍សេស

ក. $f(x)=x^5+x$ ខ. $g(x)=1-x^4$ គ. $h(x)=2x-x^2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x^5+x$

គេបាន $f(-x)=(-x)^5+(-x)=(-1)^5x^5+(-x)$

$=-x^5-x=-(x^5+x)$

$=-f(x)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍សេស

ខ. $g(x)=1-x^4$

គេបាន $g(-x)=1-(-x)^4=1-x^4=g(x)$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍គូរ

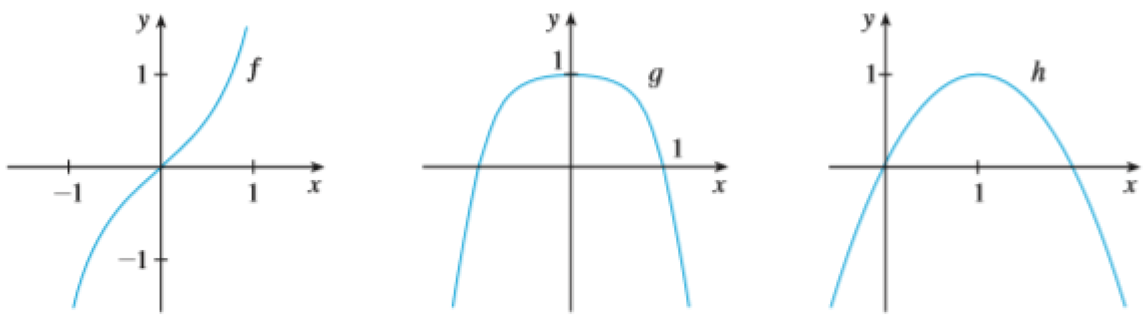
គ. $h(x)=2x-x^2$

គេបាន $h(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$

ដោយ $h(-x)\neq h(x)$ និង $h(-x)\neq -h(x)$

ដូចនេះ h មិនមែនជាអនុគមន៍គូរ និងមិនមែនជាអនុគមន៍សេស ។

សម្គាល់ថាក្រាបនៃអនុគមន៍ h គឺមិនស៊ីមេទ្រីរវាងអ័ក្សអរដោនេ និងក្រាបដើមទេ ។



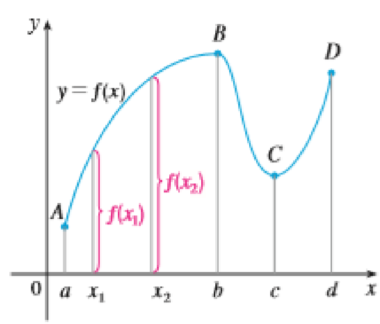
ក ខ គ

(រូបភាពទី15: ក្រាបអនុគមន៍គូ អនុគមន៍សេស)

ការកើនឡើង និងការថយចុះនៃអនុគមន៍

ក្រាបត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុង(រូបភាពទី22)កើនពី A ទៅ B ចុះពី B ទៅ C ហើយឡើងម្តងទៀតពី C ទៅ D ។ អនុគមន៍បានបង្ហាញថាការកើនឡើងលើចន្លោះ$[a,b]$ ថយចុះលើចន្លោះ$[b,c]$ និងថយចុះម្តងទៀតលើចន្លោះ$[c,d]$ ។ សម្គាល់ថាប្រសិនបើ x_1 និង x_2 ជាចំនួនពីរដែលស្ថិតនៅចន្លោះ a និង b ដែល $x_1<x_2$ នោះ $f(x_1)<f(x_2)$ ។ យើងប្រើការកំណត់បែបនេះនៃការកើនឡើងនៃអនុគមន៍ ។

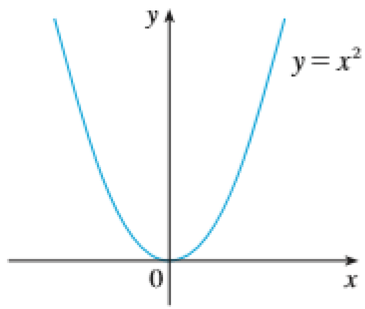
- អនុគមន៍ f មួយជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I បើ $f(x_1)<f(x_2)$ កាលណា $x_1<x_2$ ក្នុង I ។
- អនុគមន៍ f មួយជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ I បើ $f(x_1)>f(x_2)$ កាលណា $x_1>x_2$ ក្នុង I ។



(រូបភាពទី16: ភាពកើន ភាពចុះ)

ការកើនឡើងនៃអនុគមន៍គឺសំខាន់ដើម្បីដឹងថាវិសមភាព $f(x_1) < f(x_2)$ ត្រូវចំពោះគ្រប់គូរចំនួន x_1 និង x_2 ក្នុងចន្លោះ I ដែល $x_1 < x_2$ ។

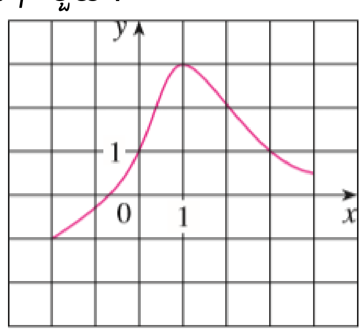
អ្នកអាចមើលក្នុងរូបភាពទី23 ដែល $f(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, 0]$ ហើយកើនលើចន្លោះ $[0, +\infty)$ ។



(រូបភាពទី17: ក្រាបអនុគមន៍ $y = x^2$)

លំហាត់

1. បើ $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ និង $g(u) = u + \sqrt{2-u}$ ។ តើពិតដែរទេដែល $f = g$?
2. បើ $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-1}$ និង $g(x) = x$ ។ តើពិតដែរទេដែល $f = g$?
3. គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f មួយ :



(រូបភាពទី 18: ក្រាបអនុគមន៍ f)

ក. រកតម្លៃនៃ $f(1)$

ខ. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f(-1)$

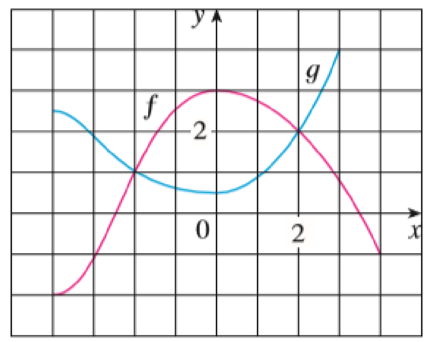
គ. តើតម្លៃ x ស្មើប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យ $f(x) = 1$?

ឃ. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃ x ចំពោះ $f(x)=0$

ង. រកដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃ f

ច. តើនៅចន្លោះណាដែលបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើន ?

4. គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g :



ក. រកតម្លៃនៃ $f(-4)$ និង $g(3)$

ខ. តើតម្លៃ x ស្មើប៉ុន្មានដើម្បី $f(x)=g(x)$?

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=-1$

ឃ. តើនៅចន្លោះណាដែលបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើន ?

(រូបភាពទី 19: ក្រាប f និង g)

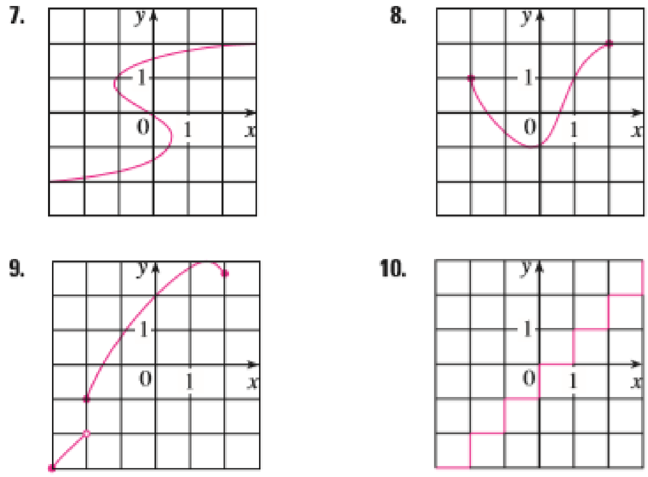
ង. រកដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃអនុគមន៍ f

ច. រកដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃអនុគមន៍ g

5. ក្នុងរូបភាពទី1 ត្រូវបានកត់ត្រាដោយឧបករណ៍បញ្ហាមួយដោយនាយកដ្ឋានធនធានរ៉ែ និងភូមិសាស្ត្រ របស់រដ្ឋកាលីហ្វ័រញ៉ានៅសាកលវិទ្យាល័យមួយ និងក្នុងមន្ទីរពេទ្យនៃសាកលវិទ្យាល័យនៃភាគខាងត្បូងរដ្ឋកាលីហ្វ័រញ៉ាក្នុងរដ្ឋ Los Angeles ។ គេប្រើប្រាស់វាដើម្បីព្យាករណ៍ពីអនុគមន៍នៃសំទុះទំនាញផែនដីនៅ USC អំឡុងពេលរញ្ជួយដីនៅ Northbridge ។

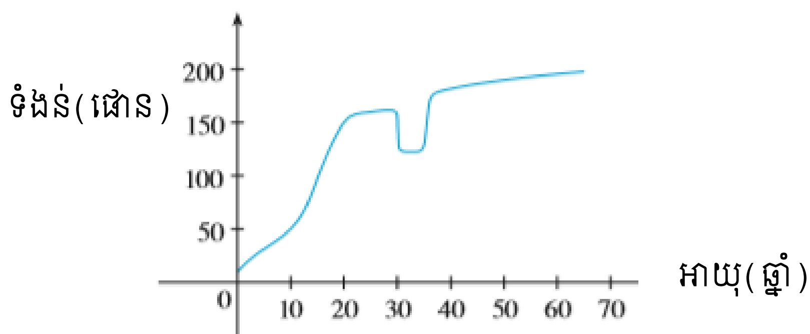
6. នៅក្នុងចំណុចនេះយើងពិភាក្សាទៅលើឧទាហរណ៍ធម្មតា ។ គ្រប់អនុគមន៍គឺ ចំនួនប្រជាជនជាអនុគមន៍នៃពេលវេលា តម្លៃប្រៃសណីយ៍ជាអនុគមន៍នៃទម្ងន់ សីតុណ្ហភាពទឹកជាអនុគមន៍នៃពេលវេលា ។ ចូរឲ្យឧទាហរណ៍ចំនួនបីផ្សេងគ្នានៃអនុគមន៍ដែលទាក់ទងទៅនឹងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃដោយធ្វើការពណ៌នា ។ តើអ្នកអាចនិយាយពីអ្វីអំពីដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃអនុគមន៍នីមួយៗ? ប្រសិនបើអាច ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍នីមួយៗ ។

7-10. ចូរកំណត់ថាតើខ្សែកោងខាងក្រោមជាក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ឬទេ? ប្រសិនបើវាក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ រកដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃអនុគមន៍នោះ ។



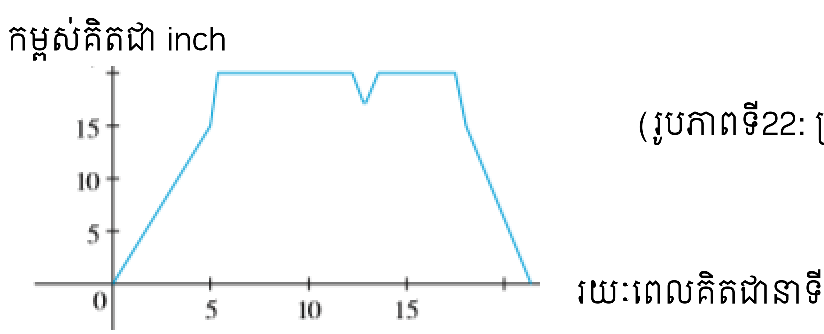
(រូបភាពទី20: ក្រាបនៃអនុគមន៍)

11. ក្រាបខាងក្រោមត្រូវបានបង្ហាញពីទម្ងន់ពិតប្រាកដនៃមនុស្សម្នាក់ជាអនុគមន៍នៃអាយុ ។ ចូរពណ៌នាពីទម្ងន់របស់មនុស្សទៅនឹងការបម្រែបម្រួលនៃពេលវេលា ។ តើអ្នកគិតថានឹងមានអ្វីកើតឡើងនៅពេលដែលមនុស្សនោះមានអាយុ30 ឆ្នាំ ?



(រូបភាពទី21: ក្រាបនៃទំងន់)

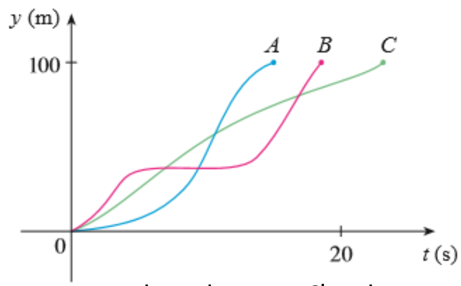
12. ក្រាបខាងក្រោមបានបង្ហាញពីកម្ពស់ទឹកនៅក្នុងអាងទឹកជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល ។ ចូរពណ៌នាពីអ្វីដែលអ្នកគិតថាកើតឡើង



(រូបភាពទី22: ក្រាបកម្ពស់)

13. អ្នកដាក់ដុំទឹកកកមានរាងគូបខ្លះចូលទៅក្នុងកែវមួយ ចាក់ទឹកត្រជាក់ចូលទៅក្នុងកែវ ហើយបន្ទាប់មកយកកែវទៅដាក់លើតុ ។ ចូរពណ៌នាពីសីតុណ្ហភាពនៃទឹកដែលរយៈពេលឆ្លងកាត់ ។ បន្ទាប់មកគូសក្រាបសីតុណ្ហភាពនៃទឹកជាអនុគមន៍នៃពេលវេលាដែលកន្លងហួស ។

14. មនុស្សបីនាក់ប្រកួតគ្នារត់ចម្ងាយ $100m$ ។ រូបភាពក្រាបនៃចម្ងាយរត់ជាអនុគមន៍នៃពេលវេលានៃអ្នករត់ម្នាក់ៗ ។ ចូរពណ៌នាពីអ្វីដែលមាននៅក្នុងក្រាបប្រាប់ពីការប្រកួតនេះ ។ នរណាជាអ្នកឈ្នះ? តើអ្នករត់ម្នាក់ៗបញ្ចប់វាយ៉ាងដូចម្តេច?

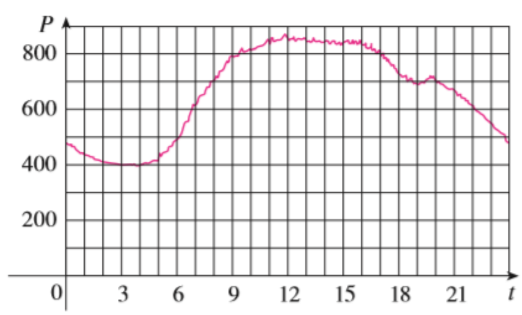


(រូបភាពទី23: ក្រាបចម្ងាយរត់របស់មនុស្សបីនាក់)

15. ក្រាបខាងក្រោមបង្ហាញពីការប្រើប្រាស់ថាមពលសប្រាប់រយៈពេលមួយថ្ងៃក្នុងខែកញ្ញានៅក្នុងរដ្ឋសាន់ហ្វ្រានស៊ីស្កូ ។ (P ជារង្វាស់គិតជាមេកាវ៉ាត់ ; t ជារង្វាស់គិតជាម៉ោង ចាប់ផ្តើមពីពាក់កណ្តាលយប់)

ក. តើការប្រើប្រាស់ថាមពលនៅម៉ោង៦ព្រឹក និងម៉ោង៦ល្ងាច ស្មើប៉ុន្មាន?

ខ. តើការប្រើប្រាស់ថាមពលទាបបំផុតនៅពេលណា?ខ្ពស់បំផុតនៅពេលណា? តើពេលវេលាទាំងនេះជាហេតុផលដែរឬទេ?



(រូបភាពទី24: ក្រាបថាមពលដែលបានប្រើប្រាស់)

16. ចូរគូសក្រាបចំនួនម៉ោងនៃពន្លឺថ្ងៃជាអនុគមន៍នៃពេលវេលានៃឆ្នាំ ។

17. ចូរគូសក្រាបនៃសីតុណ្ហភាពខាងក្រៅជាអនុគមន៍នៃពេលអំឡុងពេលធម្មតាមួយក្នុងនិទាឃរដូវ ។

18. ចូរគូសក្រាបតម្លៃទីផ្សារនៃរថយន្តថ្មីមួយជាអនុគមន៍នៃពេលវេលាក្នុងរយៈពេល២០ឆ្នាំ ។ សន្មតថាឡានត្រូវបានរក្សាទុកបានយ៉ាងល្អ ។

19. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍បរិមាណកាហ្វេពិសេសដែលបានលក់ដោយហាងមួយជាអនុគមន៍នៃតម្លៃកាហ្វេ ។

20. អ្នកបានដាក់ចំណិតនំដែលកកចូលទៅក្នុងឡកម្តៅ ហើយបានដុតវាអស់រយៈពេល១ម៉ោង ។ បន្ទាប់មកអ្នកយកវាចេញក្រៅហើយទុកវាឲ្យត្រជាក់មុនពេលញ៉ាំវា ។ ពណ៌នាពីសីតុណ្ហភាពនៃចំណិតនំដែលបានផ្លាស់ប្តូរនូវពេលដែលបានកន្លងហួស ។ បន្ទាប់មកចូរគូសក្រាបនៃសីតុណ្ហភាពនៃចំណិតនំជាអនុគមន៍នៃពេល ។

21. ម្ចាស់ផ្ទះមួយបានកាត់ស្មៅផ្ទះរបស់គាត់ជារៀងរាល់រសៀលថ្ងៃពុធ ។ ចូរគូសក្រាបនៃកម្ពស់ស្មៅជាអនុគមន៍នៃពេលក្នុងរយៈពេលបួនសប្តាហ៍ ។

22. យន្តហោះមួយបានចាកចេញពីអាកាសយានដ្ឋាន ហើយចុះចតនៅរយៈពេលមួយម៉ោងក្រោយមកនៅឯអាកាសយានដ្ឋានផ្សេងទៀតក្នុងចម្ងាយផ្លូវ $400 miles$ ។ បើតាង t ជារយៈពេលគិតជានាទីចាប់តាំងពីយន្តហោះបានចាកចេញពីស្ថានីយ៍ តាង $x(t)$ ជាចម្ងាយក្នុងការធ្វើដំណើរ និង $y(t)$ ជារយៈកម្ពស់របស់យន្តហោះ ។

ក. គូសក្រាបនៃ $x(t)$

ខ. គូសក្រាបនៃ $y(t)$

គ. គូសក្រាបនៃល្បឿនរបស់យន្តហោះនៅលើដី

ឃ. គូសក្រាបនៃល្បឿនហោះឡើង ។

23. ចំនួន N (គិតជាលាន) នៃចំនួនអ្នកជាវទូរស័ព្ទដៃនៅក្នុងសហរដ្ឋអាមេរិកគឺត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងតារាងខាងក្រោម (ការប៉ាន់ស្មានពាក់កណ្តាលឆ្នាំត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

ក. ប្រើប្រាស់ទិន្នន័យខាងលើដើម្បីគូសក្រាបនៃ N ជាអនុគមន៍នៃ t ។

ខ. ប្រើប្រាស់ក្រាបរបស់អ្នកដើម្បីប៉ាន់ស្មានចំនួននៃអ្នកជាវទូរស័ព្ទដៃនៅពាក់កណ្តាលឆ្នាំ 2001 និង 2005 ។

24. សីតុណ្ហភាព T គិតជា ^0F ត្រូវបានគេកត់ត្រារៀងរាល់ពីរម៉ោងម្តងចាប់ពីពាក់កណ្តាលយប់ម៉ោង $2:00$ នៅក្នុង Phoenix ក្នុងថ្ងៃទី 10 ខែកញ្ញា ឆ្នាំ 2008 ។ រយៈពេល t គិតជាម៉ោងចាប់ពីពាក់កណ្តាលយប់ ។

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

ក. ប្រើប្រាស់តារាងខាងលើដើម្បីគូសក្រាបនៃ T ជាអនុគមន៍នៃ t ។

ខ. ប្រើប្រាស់ក្រាបរបស់អ្នកដើម្បីប៉ាន់ស្មានសីតុណ្ហភាពនៅម៉ោង $9:00$ ព្រឹក ។

25. បើ $f(x)=3x^2-x+2$ គណនា

$f(2); f(-2); f(a); f(-a); f(a+1); 2f(a); f(2a); f(a^2); [f(a)]^2; f(a+h)$ ។

26. ស្វ៊ែប៉ោងប៉ោងមួយមានកាំ r អ៊ីញនិងមានមាឌ $v=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ ។ រកអនុគមន៍ដែលតាងបរិមាណខ្យល់ដែលបំប៉ោងស្វ៊ែនោះពីកាំ r អ៊ីញទៅកាំ $r+1$ អ៊ីញ ។

27-30 . គណនាតម្លៃខុសគ្នាដែលផ្តល់ឲ្យអនុគមន៍ ។ ចម្លើយងាយៗរបស់អ្នក

27. $f(x)=4+3x-x^2, \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

28. $f(x)=x^3, \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

29. $f(x)=\frac{1}{x}, \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

30. $f(x)=\frac{x+3}{x+1}, \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

31-37. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

31. $f(x)=\frac{x+4}{x^2-9}$ 32. $f(x)=\frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$

33. $f(t)=\sqrt[3]{2t-1}$ 34. $g(t)=\sqrt{3-t}-\sqrt{2+t}$

35. $h(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$ 36. $f(u)=\frac{u+1}{1+\frac{1}{u+1}}$

37. $F(p)=\sqrt{2-\sqrt{p}}$

38. រកដែនកំណត់ និងរូបភាពរួចគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $h(x)=\sqrt{4-x^2}$

39-50. រកដែនកំណត់ និងគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ ។

39. $f(x)=2-0.4x$ 40. $F(x)=x^2-2x+1$ 41. $f(t)=2t+t^2$

42. $H(t)=\frac{4-t^2}{2-t}$ 43. $g(x)=\sqrt{x-5}$ 44. $F(x)=|2x+1|$

45. $G(x)=\frac{3x+|x|}{x}$ 46. $g(x)=|x|-x$ 47. $f(x)\begin{cases} x+2, & x<0 \\ 1-x, & x\geq 0 \end{cases}$

48. $f(x)=\begin{cases} 3-\frac{1}{2}x, & 0\leq 2 \\ 2x-5, & x>2 \end{cases}$ 49. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leq -1 \\ x^2, & x>-1 \end{cases}$

50. $f(x)=\begin{cases} x+9, & x<-3 \\ -2x, & |x|\leq 3 \\ -6, & x>3 \end{cases}$

51-56. រកកន្សោមចំពោះអនុគមន៍ដែលក្រាបជាខ្សែកោង ។

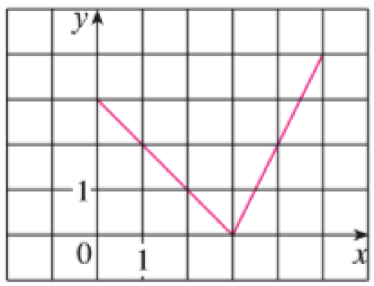
51. ផ្នែកនៃបន្ទាត់រួមមានចំណុច $(1,-3)$ និង $(5,7)$

52. ផ្នែកនៃបន្ទាត់រួមមានចំណុច $(-5,10)$ និង $(7,-10)$

53. ពាក់កណ្ដាលបាតនៃប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $x+(y-1)^2=0$

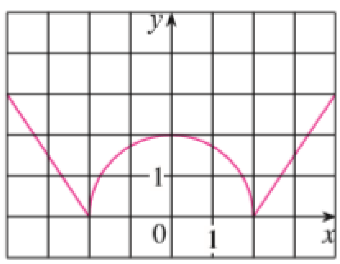
54. ពាក់កណ្ដាលកំពុលនៃរង្វង់មានសមីការ $x^2+(y-2)^2=4$

55.



(រូបភាពទី 25: ក្រាបអនុគមន៍)

56.



(រូបភាពទី 26: ក្រាបអនុគមន៍)

57-61. រករូបមន្តមួយសម្រាប់ពណ៌នាពីអនុគមន៍ និងដែនកំណត់វា

57. ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $20m$ ។ បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងជាអនុគមន៍នៃប្រវែងណាមួយក្នុងចំណោមបណ្ដោយនឹងទទឹង ។

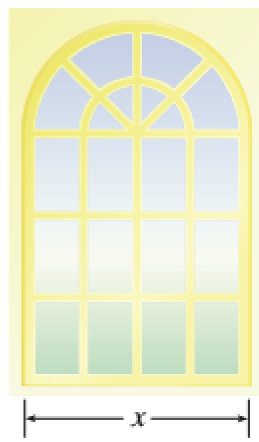
58. ចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $16m^2$ ។ បង្ហាញថាបរិមាត្រនៃចតុកោណកែងជាអនុគមន៍នៃប្រវែងណាមួយក្នុងចំណោមបណ្ដោយនឹងទទឹង ។

59. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណជាអនុគមន៍នៃប្រវែងជ្រុងណាមួយ ។

60. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកខាងលើនៃគូបជាអនុគមន៍នៃមាឌរបស់វា ។

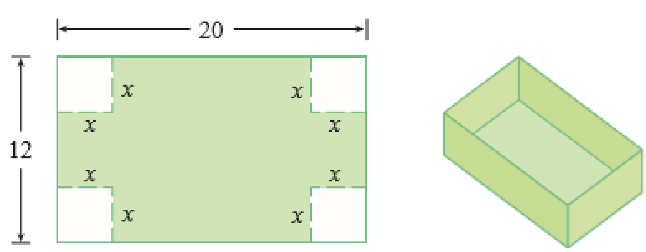
61. ប្រអប់មួយរាងប្រលេពីប៉ែតកែងមានមាឌ $2m^3$ ដែលមានបាតជាការេ ។ បង្ហាញថាផ្ទៃខាងលើនៃប្រអប់នោះជាអនុគមន៍នៃប្រវែងណាមួយនៃបាត ។

62. បង្អួចមួយមានរាងចតុកោណកែងដែលមានប្រវែងលើសដោយកន្លះរង្វង់ ។ ប្រសិនបើប្រវែរបរិមាណរង្វង់មានប្រវែង $30\,ft$ បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា A នៃបង្អួចជាអនុគមន៍នៃទទឹង x នៃបង្អួច ។



(រូបភាពទី 27: បង្អួច)

63. ប្រអប់មួយបើកគម្របធ្វើពីក្រដាសកាតុងរាងចតុកោណកែងដែលមានវិមាត្រ 12 និង 20 ។ គេកាត់ការេស្មើៗគ្នាដែលមានរង្វាស់ជ្រុង x នៅផ្នែកកែងនៃប្រអប់ ហើយបត់វាឡើងដូចរូប ។ បង្ហាញថាមាឌ V នៃប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x ។



(រូបភាពទី 28: ប្រអប់)

64. ទូរស័ព្ទចល័តមួយមានគម្រោងបង់ប្រាក់ $35\$$ ក្នុងមួយខែ ។ គម្រោងនោះរួមបញ្ចូលទាំងផ្តល់ជូន 400 នាទី និង 10 សេនក្នុងមួយនាទីសម្រាប់ការប្រើប្រាស់បន្ថែម ។ សរសេរតម្លៃប្រចាំខែ C ជាអនុគមន៍នៃ x គិតជានាទីដែលបានប្រើ និងក្រាប C ជាអនុគមន៍នៃ x ចំពោះ $0 \le x \le 600$ ។

65. ក្នុងស្ថានភាពជាក់លាក់មួយការអនុញ្ញាតឲ្យប្រើប្រាស់ល្បឿនលឿនបំផុតនៅលើផ្លូវទំនេរគឺ $65mi/h$ ហើយយឺតបំផុតគឺ $40mi/h$ ។ ចំពោះការល្មើសគឺកំណត់ឲ្យបង់ប្រាក់$15 សម្រាប់គ្រប់ mi/h ចន្លោះល្បឿនអតិបរមា ឬក៏ក្រោមអប្បបរមា ។ បង្ហាញថាបរិមាណនៃការផាកពិន័យ F ជាអនុគមន៍នៃល្បឿនបើកបរ x ហើយគូសក្រាបនៃ $F(x)$ ចំពោះ $0 \le x \le 100$ ។

66. ក្រុមហ៊ុនអគ្គិសនីមួយបានទូទាត់ប្រាកពីអតិថិជនដោយតម្លៃគោល$10 ក្នុងមួយខែ បូកបន្ថែម 6 សេនក្នុងមួយ kwh សម្រាប់ $1200kwh$ ដំបូង និង7 សេនក្នុងមួយ kwh ការប្រើប្រាស់លើស $1200kwh$ ។ បង្ហាញថាតម្លៃប្រចាំខែ E ជាអនុគមន៍នៃបរិមាណអគ្គិសនីដែលបានប្រើ x ។ ហើយគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ E ចំពោះ $0 \le x \le 2000$ ។

67. នៅក្នុងប្រទេសមួយ ពន្ធលើប្រាក់ចំណូលគឺត្រូវបានវាយតម្លៃ ។ គ្មានពន្ធលើប្រាក់ចំណូលឡើងដល់$10,000 ។ ប្រាក់ចំណូលខ្លះលើស$10,000 គឺត្រូវបង់ពន្ធ 10% ។ ប្រាក់ចំណូលកើនដល់$20,000 បើប្រាក់ចំណូលលើសពី$20,000 គឺត្រូវបង់ពន្ធ 15%

ក. គូសក្រាបនៃអត្រាពន្ធ R ជាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូល I ។

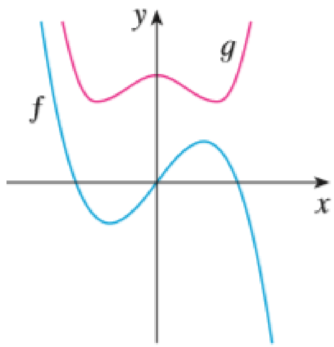
ខ. តើពន្ធមានតម្លៃប៉ុន្មាននៅប្រាក់ចំណូលមាន$14,000 ?$26,000 ?

គ. គូសក្រាបនៃការបូកសរុបតម្លៃពន្ធ T ជាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូល I ។

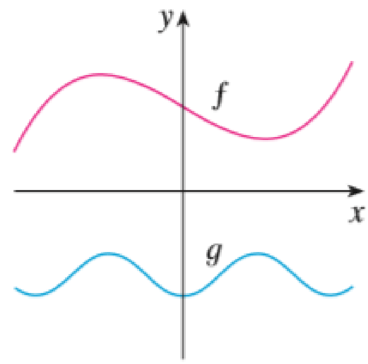
68. អនុគមន៍នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី10 និងលំហាត់ទី67 ត្រូវវាបានហៅថាអនុគមន៍ជំហានព្រោះក្រាបរបស់វាមើលទៅដូចជាកាំជណ្តើរ ។ ចូរឲ្យឧទាហរណ៍ពីរផ្សេងទៀតនៃអនុគមន៍ជំហានដែលកើតមានឡើងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ។

69-70. ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g ត្រូវបានបង្ហាញ ។ ចូរគិតថាអនុគមន៍នីមួយៗជាអនុគមន៍ គូរ សេស ឬមិនមែនទាំងពីរ ។ ចូរពន្យល់ពីអំណះអំណាង ។

69.



70.



(រូបភាពទី 29: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g)

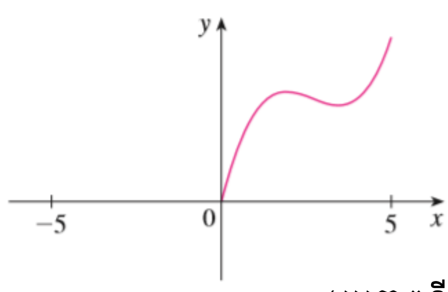
71. ក. ប្រសិនបើចំណុច $(5,3)$ នៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍គូរមួយ តើចំណុចផ្សេងទៀតត្រូវតែនៅលើក្រាបនេះដែរឬទេ?

ខ. ប្រសិនបើចំណុច $(5,3)$ នៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍សេសមួយ តើចំណុចផ្សេងទៀតត្រូវតែនៅលើក្រាបនេះដែរឬទេ?

72. អនុគមន៍ f មួយមានដែនកំណត់នៅចន្លោះ $[-5,5]$ ហើយផ្នែកនៃក្រាបត្រូវបានបង្ហាញ ។

ក. ចូរបំពេញក្រាបនៃអនុគមន៍ f ប្រសិនគេដឹងថា f ជាអនុគមន៍គូរ ។

ខ. ចូរបំពេញក្រាបនៃអនុគមន៍ f ប្រសិនបើគេដឹងថា f ជាអនុគមន៍សេស ។



(រូបភាពទី 30: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f)

73-78. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍គូរ អនុគមន៍សេស ឬមិនមែន ។ ប្រសិនបើមានក្រាបមួយសម្រាប់គណនាប្រើវាសម្រាប់ពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នក ។

73. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 74. $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$ 75. $f(x)=\frac{x}{x+1}$

76. $f(x)=x|x|$ 77. $f(x)=1+3x^2-x^4$ 78. $f(x)=1+3x^3-x^5$

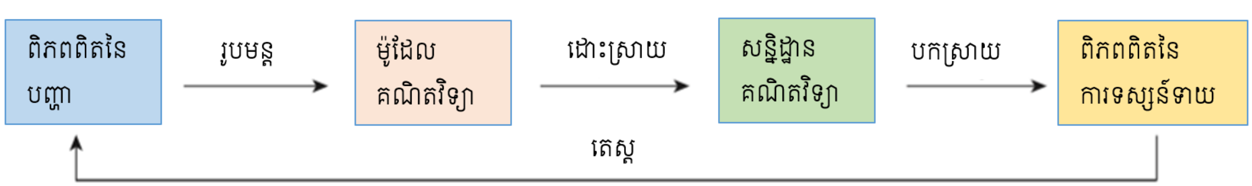
79. បើ f និង g ជាអនុគមន៍គូ ។ តើអនុគមន៍ $f+g$ ជាអនុគមន៍គូឬទេ ? បើ f និង g ជាអនុគមន៍សេស តើអនុគមន៍ $f+g$ ជាអនុគមន៍សេសឬទេ ? ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍គូ និង g ជាអនុគមន៍សេស ។ ចូរបង្ហាញចម្លើយរបស់អ្នក ។

80. ប្រសិនបើ f និង g ជាអនុគមន៍គូ ។ តើអនុគមន៍ fg ជាអនុគមន៍គូឬទេ ? បើ f និង g ជាអនុគមន៍សេស តើអនុគមន៍ fg ជាអនុគមន៍សេសឬទេ ? ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍គូ និង g ជាអនុគមន៍សេស ។ ចូរបង្ហាញចម្លើយរបស់អ្នក ។

១.២. គម្រូគណិតវិទ្យា: គម្រូនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ

គម្រូគណិតវិទ្យា គឺជាការពណ៌នាពីគណិតវិទ្យា(អត្ថន័យនៃអនុគមន៍ ឬក៏សមីការមួយ) នៃបាតុភូតពិតពលោកដូចជាទំហំប្រជាជន តម្រូវការផលិតផល ល្បឿនធ្លាក់នៃវត្ថុ ការប្រមូលផ្តុំផលិតផលក្នុងប្រតិកម្មគីមី អាយុសង្ឃឹមរស់របស់មនុស្សម្នាក់ ឬក៏ការកាត់បន្ថយការបំភាយ ។ គោលបំណងនៃគម្រូនេះគឺដើម្បីយល់ពីបាតុភូត ហើយប្រហែលជាធ្វើការទស្សទាយអំពីលក្ខណៈថ្ងៃអនាគត ។

រូបភាពទី1 បានបង្ហាញពីដំណើរការនៃគម្រូគណិតវិទ្យា ។ បានផ្តល់ឲ្យនូវបញ្ហាពិតពលោក ការងារដំបូងរបស់យើងគឺបង្កើតគម្រូគណិតវិទ្យាដោយបញ្ជាក់សញ្ញាណ និងការហៅឈ្មោះតម្លៃអាស្រ័យ និងតម្លៃមិនអាស្រ័យ និងធ្វើការសន្មតថាបាតុភូតងាយៗគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការបង្កើតដោយឆ្លងកាត់គណិតវិទ្យា ។ យើងប្រើប្រាស់នូវចំណេះដឹងរបស់យើង ហើយនឹងជំនាញគណិតវិទ្យាដើម្បីទទួលបានសមីការដែលទាក់ទងទៅនឹងតម្លៃ ។ ក្នុងកាលៈទេសៈដែលគ្មានច្បាប់ physical ដើម្បីជួយពួកយើងទេ ។ យើងអាចត្រូវការប្រមូលទិន្នន័យ(ពីបណ្ណាល័យ ឬក៏អ៊ីនធើណេត ឬក៏ដោយការពិសោធន៍ផ្ទាល់ខ្លួន) និងពិនិត្យមើលទិន្នន័យនៅក្នុងទម្រង់នៃតារាងមួយដើម្បីបែងចែកលំនាំរបស់វា ។



(រូបភាពទី1 ដ្យាក្រាមដំណើរការគគម្រូគណិតវិទ្យា)

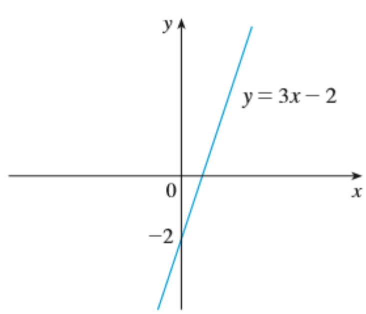
ជំហានទី2 គឺអនុវត្តន៍ទៅលើគណិតវិទ្យាដែលយើងបានដឹង(ដូចជាការគណនាដែលនឹងអភិវឌ្ឍន៍សៀវភៅនេះទាំងមូល)ទៅនឹងគម្រូគណិតវិទ្យាដែលយើងបានបង្កើតដើម្បីទាញបានការសន្និដ្ឋាននៅក្នុងគណិតវិទ្យា ។ បន្ទាប់មកនៅក្នុងជំហានទី3 យើងបានការសន្និដ្ឋានគណិតវិទ្យាហើយនឹងការបកស្រាយវាជាពត៌មានអំពីបាតុភូតក្នុងពិភពលោកពិតដោយផ្តល់នូវការពន្យល់ ឬក៏ការទាយទុកមុន ។ ដំណាក់កាលចុងក្រោយគឺដើម្បីសាកល្បងការទស្សន៍ទាយរបស់យើងដោយពិនិត្យប្រឆាំងទៅនឹងទន្និន័យថ្មី ។ ប្រសិនបើការទស្សន៍ទាយមិនសមស្របទៅនឹងលក្ខខណ្ឌជាក់ស្តែង យើងត្រូវការសម្រិតសម្រាំងគម្រូរបស់យើង ឬក៏បង្កើតគម្រូថ្មីហើយចាប់ផ្តើមម្តងទៀត ។

គម្រូគណិតវិទ្យាមួយ គឺមិនដែលតាងបានត្រឹមត្រូវទាំងស្រុងនៃphysical situation វាជាការគិតដ៏ល្អមួយ ។ គម្រូងាយល្អមួយពិតជាគ្រប់គ្រាន់ទៅក្នុងការគណនានូវគណិតវិទ្យា ក៏ប៉ុន្តែការសន្និដ្ឋានពីតម្លៃដែលបានផ្តល់ឲ្យមានភាពត្រឹមត្រូវគ្រប់គ្រាន់ ។ វាពិតជាសំខាន់ដើម្បីដឹងពីការកំណត់នៃគម្រូ ។ នៅចុងបញ្ចប់ប្រភពនៃធម្មជាតិត្រូវបានបញ្ចប់ការពណ៌នា ។

***គម្រូលីនេអ៊ែរ**

នៅពេលដែលយើងនិយាយថា y ជាគម្រូលីនេអ៊ែរមួយនៃ x មានន័យថាក្រាបនៃអនុគមន៍គឺជាបន្ទាត់មួយ $y=f(x)=mx+b$ ដែល m ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ និង b ជាចំនុចកាត់អ័ក្ស $y'y$ ។

លក្ខណៈពិសេសនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរគឺជាការកើនឡើងនូវអត្រាតម្លៃថេរ ។ ជាឧទាហរណ៍នៅក្នុងរូបភាពី2 បានបង្ហាញពីក្រាបនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x)=3x-2$ ហើយតារាងនៃតម្លៃគម្រូ ។ សម្គាល់ថា នៅពេល x កើន 0.1 តម្លៃ $f(x)$ កើន 0.3 ។ ដូចនេះ $f(x)$ កើន3ដងលឿនជាង x ។ ដូច្នេះមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាប $y=3x-2$ គឺ 3 អាចបកស្រាយពីអត្រាបម្រែបម្រួលនៃ y អាស្រ័យទៅនឹងតម្លៃ x ។



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

(រូបភាពទី2 ក្រាបអនុគមន៍ $y = 3x - 2$)

ឧទាហរណ៍ទី1 :

ក. ខ្យល់ក្តៅផ្លាស់ទីឡើងលើ ហើយចុះត្រជាក់ ។ ប្រសិនបើសីតុណ្ហភាពលើដី 20^0c ហើយសីតុណ្ហភាពនៅកម្ពស់ $1Km$ គឺ 10^0C បង្ហាញថាសីតុណ្ហភាព T គិតជា ^0C ជាអនុគមន៍នៃកម្ពស់គិតជា km ។

ខ. គូសក្រាបនៃអនុគមន៍នៅក្នុងផ្នែក ក ។ តើមេគុណប្រាប់ទិសតាងឲ្យអ្វី ?

គ. តើសីតុណ្ហភាពនៅកម្ពស់ $2.5km$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងសន្មតថា T ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរនៃ h គេអាចសរសេរបាន $T = mh + b$

គេឲ្យ $T = 20$ ពេល $h = 0$ គេបាន

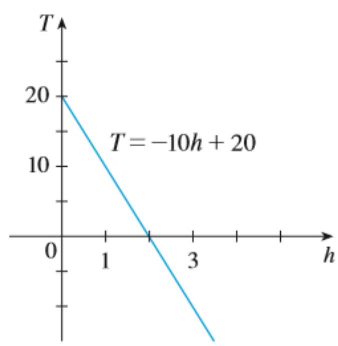
$20 = m \cdot 0 + b = b$

ក្នុងន័យនេះ y_0 គឺ $b = 20$ ។

គេឲ្យ $T = 10$ ពេល $h = 1$ គេបាន

$10 = m \cdot 1 + 20$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់គឺ $m = 10 - 20 = -10$ ហើយអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $T = -10h + 20$



(រូបភាពទី3: ក្រាបនៃ $T = -10h + 20$)

ខ. ក្រាបត្រូវបានគូសក្នុងរូបភាពទី3 ។ មេគុណប្រាប់ទិសគឺ $m = -10^0C/km$ ហើយការតាងនូវអត្រាបម្រែបម្រួលសីតុណ្ហភាពនេះអាស្រ័យនឹងកម្ពស់ ។

គ. នៅកម្ពស់ $h = 2.5km$ សីតុណ្ហភាពគឺ $T = -10(2.5) + 20 = -5^0C$

ប្រសិនបើគ្មានច្បាប់រូបវិទ្យា ឬក៏គោលការណ៍ដើម្បីជួយយើងក្នុងការបង្កើតគម្រូមួយទេ យើងត្រូវបង្កើតនូវគម្រូ empirical ដែលផ្អែកទៅលើការបញ្ចូលទៅលើទិន្នន័យដែលប្រមូលបាន ។ យើងត្រូវស្វែងរកខ្សែកោងដែលសមទៅនឹងអត្ថន័យនៃទិន្នន័យដែលវាអាចចាប់យកមូលដ្ឋាននៃចំណុចទិន្នន័យ ។

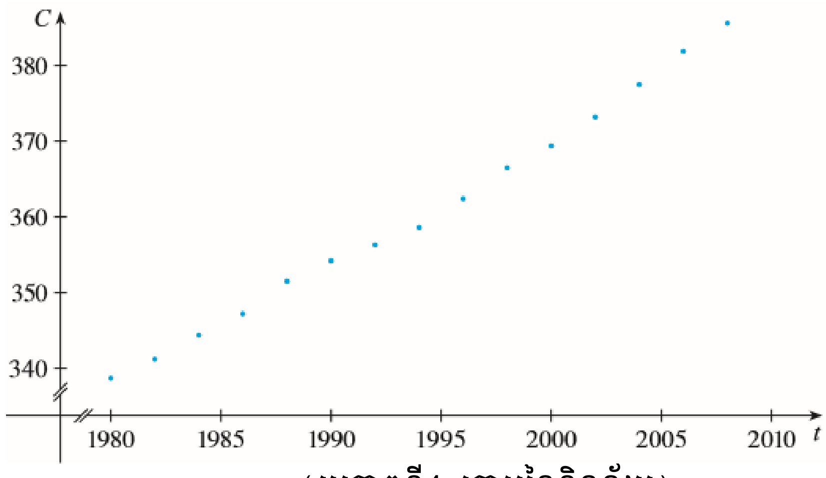
ឧទាហរណ៍ទី2 : តារាង 1 បង្ហាញពីកម្រិតជាមធ្យមនៃកាបូនឌីអុកស៊ីតនៅក្នុងបរិយាកាស ត្រូវបានវាស់ក្នុងផ្នែកគិតក្នុងមួយលាននៅ Mauna Loa តាមរយៈការសង្កេតពីឆ្នាំ1980 ដល់ 2008 ។ ប្រើប្រាស់ទិន្នន័យនៅក្នុងតារាងទី 1 ដើម្បីស្វែងរកគម្រូមួយសម្រាប់កម្រិតកាបូនឌីអុកស៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

យើងប្រើប្រាស់ទិន្នន័យក្នុងតារាងទី1 ដើម្បីបង្កើតដ្យាក្រាមមិនមានសណ្ដាប់ធ្នាប់ នៅក្នុងរូបភាពទី4 ដែល t តាងឲ្យពេលវេលាគិតជាឆ្នាំ និង C តាងឲ្យកម្រិត CO_2 (ក្នុងផ្នែកខ្លះក្នុងមួយលាន)

តារាងទី1

ឆ្នាំ	កម្រិត CO_2 (ppm)	ឆ្នាំ	កម្រិត CO_2 (ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		



(រូបភាពទី4: ក្រាបនៃទិន្នន័យ)

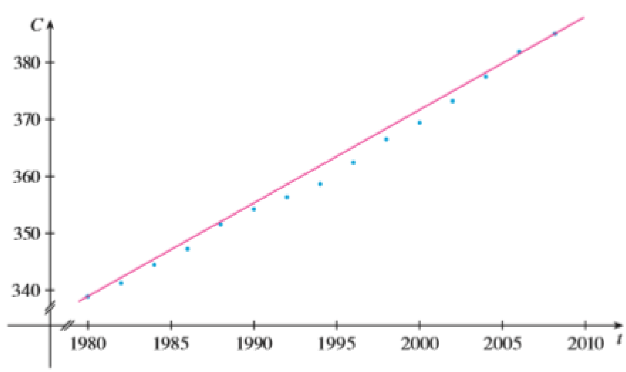
សម្គាល់ថា ចំណុចទិន្នន័យនឹងលេចឡើងទៅជិតនឹងបន្ទាត់ត្រង់ ដូច្នេះវាជាធាតុដើមដើម្បីជ្រើសរើសគម្រូលីនេអ៊ែរមួយនៅក្នុងករណីនេះ ។ ក៏ប៉ុន្តែមានបន្ទាត់ជាច្រើនដែលប្រហាក់ប្រហែលទៅចំណុចនៃទិន្នន័យទាំងនេះដែរ ដូច្នេះតើបន្ទាត់មួយណាដែលយើងយកមកប្រើ? បន្ទាត់ដែលមានលទ្ធភាពក្នុងការប្រើគឺបន្ទាត់ដែលឆ្លងកាត់ចំណុចទីមួយនឹងចំណុចចុងក្រោយនៃទិន្នន័យ ។ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់នេះគឺ

$$\frac{385.6-338.7}{2008-1980}=\frac{46.9}{28}=1.675$$

ហើយសមីការរបស់វាគឺ $C-338.7=1.675(t-1980)$

ឬក៏ $$C=1.675t-2977.8 \qquad (1)$$

សមីការ(1) ផ្តល់នូវគម្រូលីនេអ៊ែរដែលអាចទៅរួចមួយសម្រាប់កម្រិតកាបូនឌីអុកស៊ីត វាមានក្រាបនៅក្នុងរូបភាពទី5



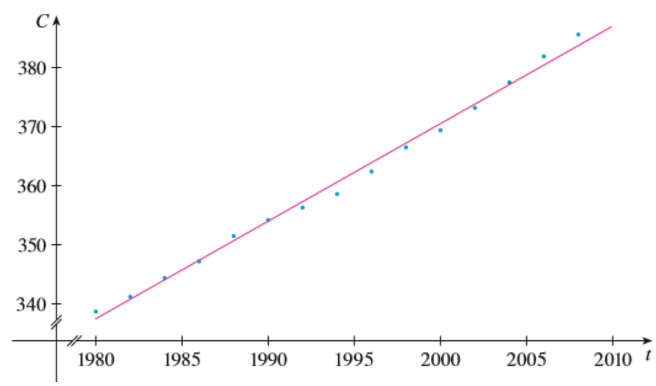
(រូបភាពទី5: ក្រាបរបស់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ)

សម្គាល់ថាគម្រូរបស់យើងបានផ្តល់នូវតម្លៃខ្ពស់ជាងភាគច្រើននៃកម្រិត CO_2 ពិត ។ គម្រូលីនេអ៊ែរកាន់តែល្អប្រសើរគឺទទួលបានដោយវិធីស្ថិតិត្រូវបានហៅថា តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។ ប្រសិនបើយើងប្រើក្រាបក្នុងការគណនា យើងបញ្ចូលទិន្នន័យពីតារាងទី1 ចូលទៅកន្លែងកែតម្រូវទិន្នន័យហើយជ្រើសរើសតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។ វាបានផ្តល់នូវមេគុណប្រាប់ទិសនិង y_0 នៃតម្រែតម្រង់បន្ទាត់គឺ $m = 1.65429$ $b = -2938.07$

ដូច្នេះ គម្រូការយ៉ាងតិចបំផុតសម្រាប់កម្រិត CO_2 គឺ $C = 1.65429t - 2938.07$ (2)

ក្នុងរូបភាពទី6 យើងមានក្រាបរបស់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរក៏ដូចជាចំណុចទិន្នន័យ ។ បើប្រៀបធៀបទៅនឹងរូបភាពទី5 យើងឃើញថាវាបានផ្តល់ឲ្យល្អជាងគម្រូលីនេអ៊ែរពីមុន ។

(រូបភាពទី6: ក្រាបរបស់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ)



ឧទាហរណ៍ទី3 : ប្រើប្រាស់គម្រូលីនេអ៊ែរផ្តល់ដោយសមីការទី2 ដើម្បីប៉ាន់ស្មានពីកម្រិតមធ្យមរបស់ CO_2 សម្រាប់ឆ្នាំ1987 ហើយទស្សន៍ទាយពីកម្រិតនេះនៅក្នុងឆ្នាំ2015 ។ ផ្អែកទៅលើគម្រូនេះ តើកម្រិត CO_2 នឹងលើស 420 ផ្នែកក្នុងមួយលាននៅពេលណា?

ដំណោះស្រាយ

ប្រើសមីការ(2) ដោយ $t = 1987$ យើងប៉ាន់ស្មានថាកម្រិត CO_2 ជាមធ្យមនៅឆ្នាំ1987 គឺ

$$C(1987) = (1.65429)(1987) - 2938.07 \approx 349.00$$

នេះជាឧទាហរណ៍មួយនៃការបកស្រាយព្រោះយើងបានប៉ាន់ស្មានតម្លៃមួយរវាងការសង្កេតពីតម្លៃ ។ (ជាការពិតណាស់ អ្នកសង្កេត Mauna Loa បានធ្វើរបាយការណ៍ថាកម្រិត CO_2 មធ្យមក្នុងឆ្នាំ1987 គឺ $348.93 ppm$ ដូច្នេះការប៉ាន់ស្មានរបស់យើងគឺត្រឹមត្រូវ)

ដោយ $t = 2015$ យើងបាន $C(2015) = (1.65429)(2015) - 2938.07 \approx 395.32$

ដូចនេះយើងទស្សន៍ទាយថាកម្រិត CO_2 ជាមធ្យមនៅក្នុងឆ្នាំ2015 នឹងមាន $395.3ppm$ ។ នេះគឺជាឧទាហរណ៍មួយនៃ extrapolation ព្រោះយើងមានការទស្សន៍ទាយតម្លៃខាងក្រៅការសង្កេត ។ ដូច្នេះយើងមិនសូវច្បាស់ថាការទស្សន៍ទាយរបស់យើងត្រឹមត្រូវនោះទេ ។ ប្រើប្រាស់សមីការទី2 យើងឃើញថាកម្រិត CO_2 លើស $420ppm$ នៅពេល $1.65429t - 2938.07 > 420$

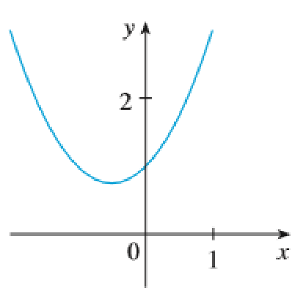
ដោះស្រាយវិសមីការ យើងទស្សន៍ទាយថាកម្រិត CO_2 នឹងលើស $420ppm$ នៅក្នុងឆ្នាំ2030 ។ ការទស្សន៍ទាយនេះគឺប្រថុយព្រោះវាទាក់ទងទៅនឹងការចំណាយពេលក្នុងការសង្កេត ។ ជាការពិតយើងមើលក្នុងរូបភាពទី6 កម្រិតនៃ CO_2 មានការកើនឡើងយ៉ាងឆាប់រហ័សក្នុងប៉ុន្មានឆ្នាំថ្មីៗ ដូច្នេះកម្រិតនេះអាចលើស $420ppm$ មុនឆ្នាំ2030 ។

*អនុគមន៍ពហុធា

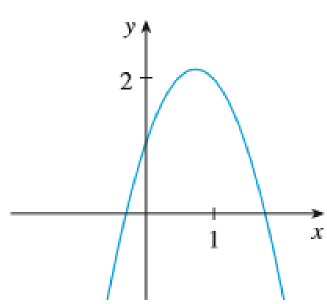
អនុគមន៍ P មួយត្រូវបានហៅថាពហុធាប្រសិនបើ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយហើយចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនថេរហៅថាមេគុណនៃពហុធា ។ ដែនកំណត់នៃពហុធាខ្លះគឺចំនួនពិត $R = (-\infty, +\infty)$ ។ បើមេគុណ $a_n \neq 0$ នោះដឺក្រេនៃពហុធាគឺ n ។

ឧទាហរណ៍ : អនុគមន៍ $P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$ ជាពហុធាដឺក្រេទី6ពហុធាដឺក្រេទី1 មានទម្រង់ $P(x) = mx + b$ ហើយដូច្នេះវាជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ។ ពហុធាដឺក្រេទី2 មានទម្រង់ $P(x) = ax^2 + bx + c$ ហើយត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍កាដ្រាទិច ។ ក្រាបរបស់វាជាប៉ារ៉ាបូលជានិច្ចដោយមានការផ្លាស់ប្តូរប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ ដូចដែលយើងនឹងឃើញនៅក្នុងចំណុចបន្ទាប់ ។ ប៉ារ៉ាបូលបើកបែរឡើងលើប្រសិនបើ $a > 0$ ហើយបែរចុះក្រោមប្រសិនបើ $a < 0$ ។ (រូបភាពទី7: ក្រាបអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល)



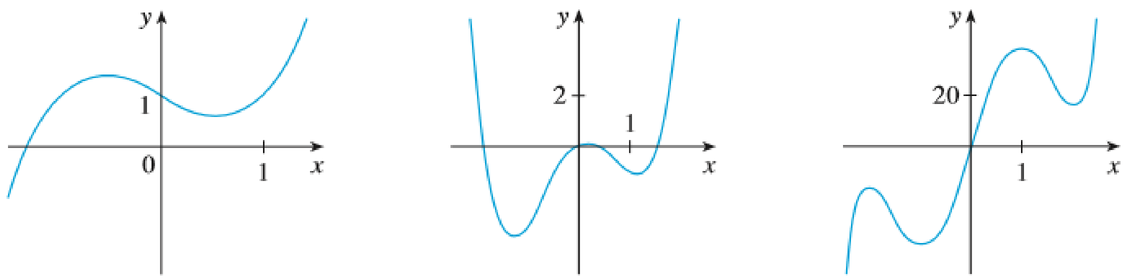
(ក) $y = x^2 + x + 1$



(ខ) $y = -2x^2 + 3x + 1$

អនុគមន៍ដឺក្រេទី3 មានទម្រង់ $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad , \qquad a\neq 0$

ហើយត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍គូប ។ ក្នុងរូបភាពទី8 បានបង្ហាញក្រាបនៃអនុគមន៍គូបមួយក្នុងផ្នែក (ក) ហើយនឹងក្រាបនៃពហុធាដឺក្រេទី4 និង 5 នៅក្នុងផ្នែក (ខ) និង (គ) ។ យើងនឹងឃើញថាហេតុអ្វីបានជាមានក្រាបទាំងនេះ ។ (រូបភាពទី8: ក្រាបនៃអនុគមន៍)



(ក) $y=x^3-x+1$ (ខ) $y=x^4-3x^2+x$ (គ) $y=3x^5-25x^3+60x$

ពហុធាគឺធម្មតាត្រូវគេប្រើក្នុងគម្រូចំនួនផ្សេងៗគ្នាដែលកើតឡើងនៅក្នុងធម្មជាតិ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ។ ជាឧទាហរណ៍ ក្នុងចំណុច 3.7 យើងនឹងពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជាសេដ្ឋកិច្ចតែងតែប្រើពហុធា $P(x)$ ដើម្បីតាងតម្លៃនៃការផលិត x ឯកតានៃទំនិញមួយ ។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍យើងប្រើអនុគមន៍កាដ្រាទិចក្នុងការទម្លាក់បាល់ ។

ឧទាហរណ៍ទី4 : បាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីខាងលើអគារCN កម្ពស់ $450m$ ពីដី ។ ហើយកម្ពស់ h ពីដីត្រូវបានគេកត់ត្រានៅចន្លោះពេលមួយវិនាទីនៅក្នុងតារាងទី2 ។ រកគម្រូមួយឲ្យសមស្របទៅនឹងទិន្នន័យ និងប្រើគម្រូនេះដើម្បីទស្សន៍ទាយពេលវេលានៅពេលដែលបាល់ធ្លាក់ចុះដល់ដី ។

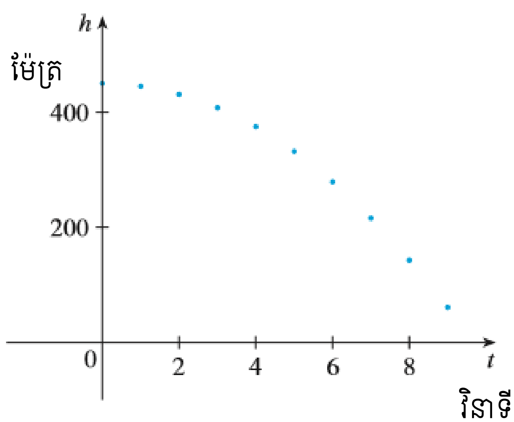
Time (seconds)	Height (meters)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375

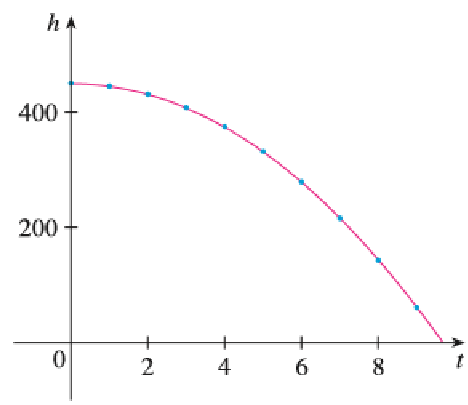
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

ដំណោះស្រាយ

យើងគូសនូវគម្រោងទិន្នន័យរាយប៉ាយនៅក្នុងរូបភាពទី9 ហើយពិនិត្យមើលថាគម្រូលីនេអ៊ែរគឺមិនសមស្រប ។ ក៏ប៉ុន្តែវាមើលទៅដូចជាចំណុចទិន្នន័យអាចនៅលើប៉ារ៉ាបូល ដូច្នេះយើងព្យាយាមជំនួសដោយគម្រូកាដ្រាទិច ។ ប្រើក្រាបគណនា ឬក៏ប្រព័ន្ធពីជគណិតក្នុងកុំព្យូទ័រ(ដែលប្រើវិធីសាស្រ្តការេយ៉ាងតិច) យើងបានគម្រូកាដ្រាទិច :

(3) $h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$





(រូបភាពទី9: ក្រាបចំណុចដាច់ៗ) (រូបភាពទី10: ក្រាបជាប់)

នៅក្នុងរូបភាពទី10 យើងមានក្រាបនៃសមីការ3 ទាំងអស់និងចំណុចទិន្នន័យហើយឃើញថាផ្តល់នូវគម្រូកាដ្រាទិចបានយ៉ាងល្អ ។

បាល់បានធ្លាក់ដល់ដីនៅពេល $h=0$ ដូច្នេះយើងអាចដោះស្រាយសមីការកាដ្រាទិច

$$-4.90t^2+0.96t+449.36=0$$

នាំឲ្យ $t=\dfrac{-0.96\pm\sqrt{(0.96)^2-4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$

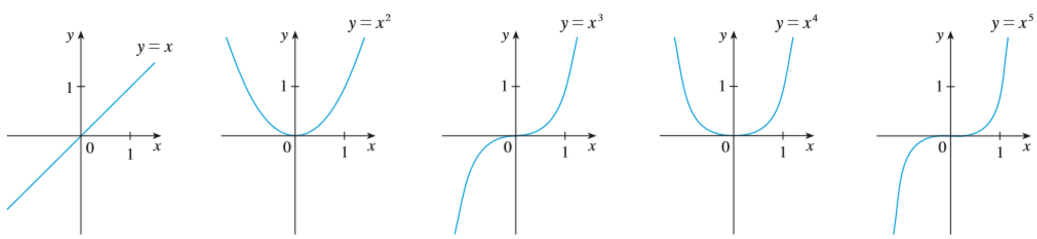
ឬសវិជ្ជមាននៃសមីការគឺ $t\approx 9.67$ ដូច្នេះយើងទាយថាបាល់នឹងធ្លាក់មមកដល់ដីបន្ទាប់ពី 9.7 ក្រោយ ។

*អនុគមន៍ស្វ័យគុណ

អនុគមន៍នេះមានទម្រង់ $f(x)=x^n$ ដែល a ជាចំនួនថេរ ត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍ស្វ័យគុណ ។ យើងអាចវិភាគបានគ្រប់ករណី

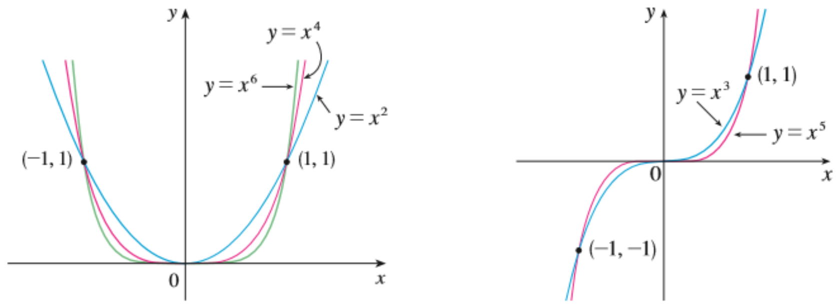
(i) $a=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^n$ ចំពោះ $n=1,2,3,4,5$ ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី11 (ទាំងនេះគឺជាពហុធា) ។ យើងដឹងហើយពីរូបរាងនៃក្រាប $y=x$ (ជាបន្ទាត់មួយដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើមួយ) និង $y=x^2$ (ជាប៉ារ៉ាបូលមើលក្នុងឧទាហរណ៍2(b) ក្នុងចំណុច1.1) ។



(រូបភាពទី11: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^n$ ចំពោះ $n=1,2,3,4,5$)

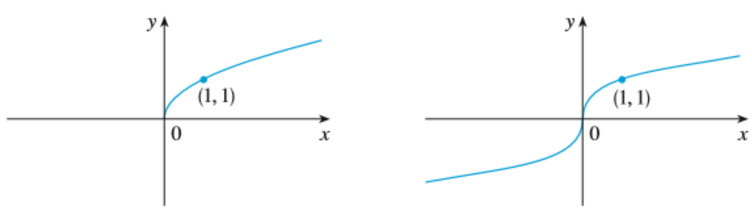
រូបរាងទូទៅនៃក្រាប $f(x)=x^n$ អាស្រ័យទៅលើតម្លៃរបស់ n គូរ ឬសេស ។ ប្រសិនបើ n គូរនោះ $f(x)=x^n$ ជាអនុគមន៍គូរហើយក្រាបរបស់វាដូចទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ដែរ ។ ប្រសិនបើ n សេសនោះ $f(x)=x^n$ ជាអនុគមន៍សេសហើយក្រាបរបស់វាដូចទៅនឹងក្រាបនៃ $y=x^3$ ។ សម្គាល់ក្នុងរូបភាពទី12 ទោះបីជា n កើនឡើងក្រាបនៃ $y=x^n$ ខិតទៅរក 0 ហើយកោងពេល $|x|\geq 1$ ។(ប្រសិនបើ x តូចនោះ x^2 ក៏តូច x^3 ក៏រឹតតែតូចចំណែក x^4 ក៏តូច និងតូចបន្តបន្ទាប់ ។



(រូបភាពទី12: ក្រាបអនុគមន៍ $y = x^n$)

(ii) $a = \dfrac{1}{n}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

អនុគមន៍ $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ គឺជាអនុគមន៍ឫស ។ ចំពោះ $n = 2$ វាជាអនុគមន៍ឫសការេ $f(x) = \sqrt{x}$ ដែលដែនកំណត់គឺ $[0,\infty)$ ហើយក្រាបរបស់វាគឺកើនពាក់កណ្ដាលនៃប៉ារ៉ាបូល $x = y^2$ (មើលក្នុងរូបទី13 ក) ។ ចំពោះតម្លៃគូរផ្សេងទៀតនៃ n ក្រាបនៃ $y = \sqrt[n]{x}$ គឺដូចទៅនឹងក្រាប $y = \sqrt{x}$ ។ ចំពោះ $n = 3$ យើងបានអនុគមន៍ឫសគូប $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ដែលដែនកំណត់គឺ□ (ហៅឡើងវិញថាគ្រប់ចំនួនពិតមានឫសគូបមួយ) ហើយក្រាបត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី13 ខ ។ ក្រាបនៃ $y = \sqrt[n]{x}$ ចំពោះ n សេស ($n > 3$) គឺដូចទៅនឹង $y = \sqrt[3]{x}$ ដែរ ។



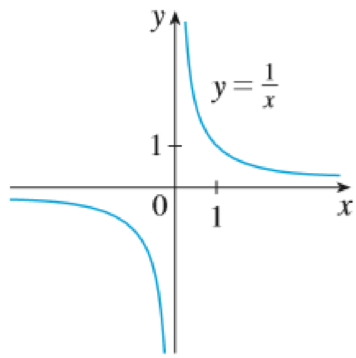
(ក) $f(x) = \sqrt{x}$ (ខ) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(រូបភាពទី13: ក្រាបអនុគមន៍ f)

(iii) $a = -1$

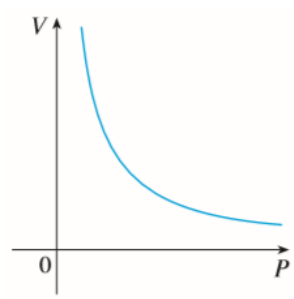
ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ ត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី14 ។ ក្រាបរបស់វាមានសមីការ $y = \dfrac{1}{x}$ ឬក៏ $xy = 1$ ហើយជាអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សអរដោរនេជាអាស៊ីមតូត ។ អនុគមន៍នេះកើត

មាននៅក្នុងរូបវិទ្យានិងគីមីវិទ្យាទាក់ទងជាមួយនឹងច្បាប់បយដែលពោលថា នៅពេលសីតុណ្ហភាពថេរ មាឌនៃឧស្ម័នមានតម្លៃច្រាសសមាមាត្រទៅនឹងសម្ពាធ P ។



(រូបភាពទី 14: ក្រាបអនុគមន៍$y=\frac{1}{x}$)

$V=\dfrac{C}{P}$ ដែលC ជាចំនួនថេរ ។ ដូចនេះក្រាបនៃV ជាអនុគមន៍នៃ P (មើលរូបភាពទី15) មានរាងទូទៅដូចជាពាក់កណ្ដាលក្រាបនៃរូបទី14 ។



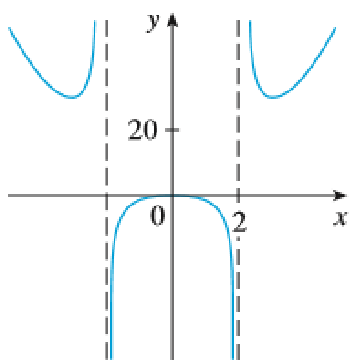
(រូបភាពទី15: ក្រាប $V=\frac{C}{P}$)

អនុគមន៍ស្វ័យគុណក៏ធ្លាប់ជាគម្រូទំនាក់ទំនងនៃប្រភេទនៃផ្ទៃក្រឡា(លំហាត់តី26-27) ការបំភ្លឺជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយពីប្រភពពន្លឺមួយ(លំហាត់ទី25) ហើយរយៈពេលនៃការផ្លាស់ប្ដូរនៃភពមួយជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយរបស់វាពីព្រះអាទិត្យមក(លំហាត់ទី28) ។

***អនុគមន៍សនិទាន**

អនុគមន៍សនិទានគឺជាផលធៀបនៃអនុគមន៍ពហុធាពីរ : $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

ដែល P និង Q គឺជាពហុធា ។ ដែនកំណត់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ដែល $Q(x)\neq 0$ ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ធម្មតានៃអនុគមន៍សនិទានគឺអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ដែលមានដែនកំណត់គឺ $\{x / x\neq 0\}$ នេះគឺជាអនុគមន៍ច្រាសដែលមាក្រាបក្នុងរូបភាពទី14 ។ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^4-x^2+1}{x^2-4}$ គឺអនុគមន៍សនិទានដែលមានដែនកំណត់ $\{x / x\neq \pm 2\}$ ។ ក្រាបរបស់វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី16



(រូបភាពទី16: ក្រាប $f(x)=\dfrac{2x^4-x^2+1}{x^2-4}$)

***អនុគមន៍ពីជគណិត**

អនុគមន៍ f ត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍ពីជគណិត ហើយអនុគមន៍នេះត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយការធ្វើប្រមាណវិធីដូចជា បូក ដក គុណ ចែក រួមទាំងរ៉ាឌីកាល់ផងដែរ ដោយចាប់ផ្តើមចេញពីអនុគមន៍ពហុធា ។ អនុគមន៍សនិទានគឺជាអនុគមន៍ពីជគណិតស្វ័យប្រវត្តិតែម្តង ។

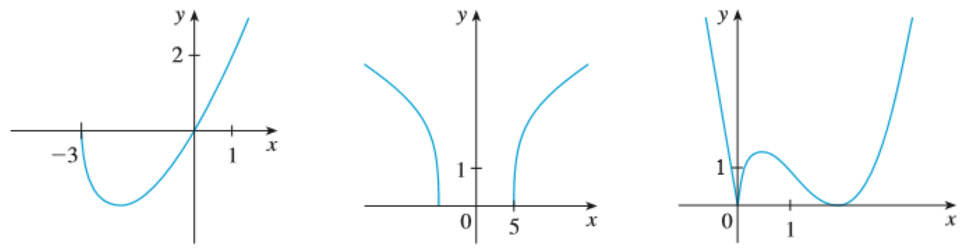
ឧទាហរណ៍ពីរអនុគមន៍ :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \qquad\qquad g(x)=\frac{x^4-16x^2}{x+\sqrt{x}}+(x-2)\sqrt[3]{x+1}$$

នៅពេលយើងគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ពីជគណិតក្នុងជំពូកទី4 យើងនឹងឃើញថាក្រាបរបស់វាអាចសន្មតពីតម្លៃនឹងរូបរាងបាន ។ ក្នុងរូបភាពទី17 បង្ហាញពីរូបភាពដែលអាចកើតមាន ។ឧទាហរណ៍មួយនៃអនុគមន៍ពីជគណិតកើតឡើងនៅក្នុងទ្រឹស្តីទំនាក់ទំនងរវាងម៉ាសនៃភាគល្អិត និងល្បឿន v គឺ $m=f(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

ដែល m_0 ជាម៉ាសភាគល្អិតដែលនៅសល់ហើយ $c=3.0\times 10^5 km/s$ ជាល្បឿននៃពន្លឺក្នុងសុញ្ញកាស ។

(រូបភាពទី17: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f,g និង h)

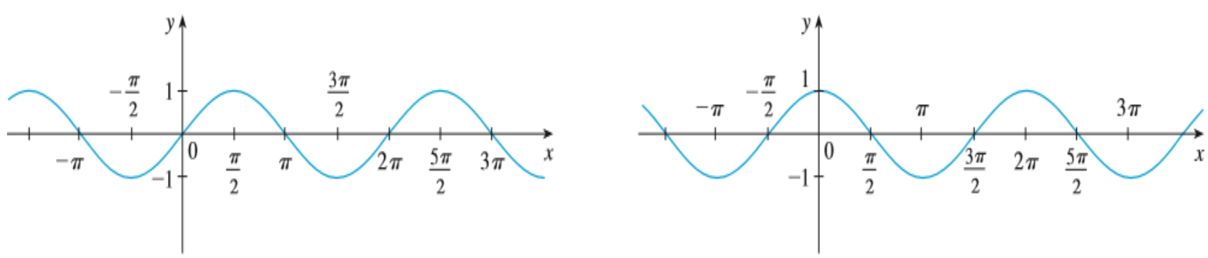


ក. $f(x)=x\sqrt{x+3}$ ខ. $g(x)=\sqrt[4]{x^2-25}$ គ. $h(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$

*អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ពេលយើង និយាយអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ត្រូវបានយល់ថា $\sin x$ មានន័យថាស៊ីនុសនៃមុំ x មានរង្វាស់គិតជារ៉ាដ្យង់ ។ ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុសត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី18 ។

(រូបភាពទី18: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g)



ក. $f(x)=\sin x$ ខ. $g(x)=\cos x$

សម្គាល់ថា អនុគមន៍ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុសមានដែនកំណត់គឺ $(-\infty,+\infty)$ ហើយរូបភាពនៅចន្លោះ $[-1,1]$ ។ ដូចនេះចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ x យើងបាន

$$-1\le \sin x\le 1 \qquad -1\le \cos x\le 1$$

ឬក៏លក្ខខណ្ឌនៃតម្លៃដាច់ខាត

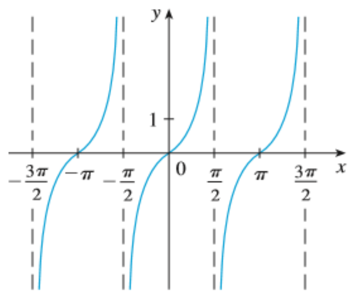
$$|\sin x|\le 1 \qquad |\cos x|\le 1$$

តម្លៃ0 នៃអនុគមន៍ស៊ីនុសវាកើតឡើងពីចំនួនគត់ជាច្រើននៃ π នោះគឺ $\sin x = 0$ ពេល $x = n\pi$ ដែល n ជាចំនួនគត់

តម្លៃសំខាន់នៃអនុគមន៍ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុសគឺថាវាជាអនុគមន៍ខួបហើយមានខួបស្មើ 2π ។ នេះមានន័យថាគ្រប់តម្លៃ x ។

$$\boxed{\sin(x+2\pi) = \sin x \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x}$$

អនុគមន៍តង់សង់គឺទាក់ទងទៅនឹងអនុគមន៍ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុសតាងដោយសមីការ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ហើយក្រាបរបស់វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី19 ។ វាមិនត្រូវបានកំណត់នៅពេលដែល $\cos x = 0$ នៅពេល $x = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$ រូបភាពនៃអនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់គឺ $(-\infty, +\infty)$ ។ សម្គាល់ថា អនុគមន៍តង់សង់មានខួបស្មើនឹង π : $\tan(x+\pi) = \tan x$ ចំពោះគ្រប់ x ។

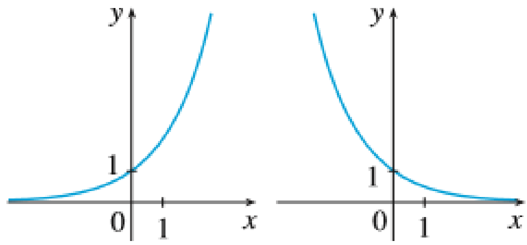


(រូបភាពទី19: ក្រាបអនុគមន៍ $y = \tan x$)

អនុគមន៍បីផ្សេងទៀតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមាដូចជា $\cosh, \mathrm{sech}$ និង $\cot$ គឺជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\sin, \cos$ និង $\tan$ ។

*អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់ $f(x) = a^x$ ដែល a ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន ។ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2^x$ និង $y = (0.5)^x$ ត្រូវវាបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី20 ។ ក្នុងករណីទាំងពីរនេះមានដែនកំណត់គឺ $(-\infty, +\infty)$ ហើយរូបភាពមានដែនកំណត់ $(0, +\infty)$ ។

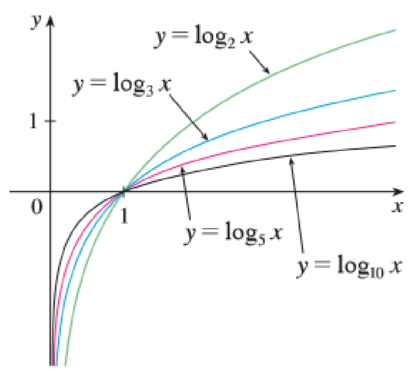


ក. $y=2^x$ ខ. $y=(0.5)^x$

(រូបភាពទី20: ក្រាបអនុគមន៍ $y=2^x$ និង $y=(0.5)^x$)

*អនុគមន៍លោការីត

អនុគមន៍លោការីតមានទម្រង់ $f(x)=\log_a x$ ដែល a ជាចំនួនថេរវិជ្ជមានដែលជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល គេនឹងសិក្សានៅក្នុងចំណុច1.6 ។ ដែនកំណត់គឺ $(0,+\infty)$ ហើយរូបភាពគឺ $(-\infty,+\infty)$ ហើយអនុគមន៍នេះកើនយ៉ាងយឺតពេល $x>1$ ។



(រូបភាពទី21: ក្រាបអនុគមន៍ $y=\log_n x$)

ឧទាហរណ៍ទី5 ចូរកំណត់ពីប្រភេទនៃអនុគមន៍ក្នុងចំណោមអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=5^x$ ខ. $g(x)=x^5$

គ. $h(x)=\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ ឃ. $u(t)=1-t+5t^4$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=5^x$ ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

ខ. $g(x)=x^5$ ជាអនុគមន៍ស្វ័យគុណ ។ យើងក៏អាចគិតថាវាជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី5បានផងដែរ ។

គ. $h(x)=\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ ជាអនុគមន៍ពីជគណិត ។

ឃ. $u(t)=1-t+5t^4$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី4 ។

លំហាត់

1-2. ចូរកំណត់ពីប្រភេទនៃអនុគមន៍នីមួយៗថាវាជាអនុគមន៍ស្វ័យគុណ អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ អនុគមន៍ពហុធា(បញ្ជាក់ដឺក្រេ) អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍ពីជគណិត អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬក៏អនុគមន៍លោការីត ។

1. ក. $f(x)=\log_2 x$ ខ. $g(x)=\sqrt[4]{x}$ គ. $h(x)=\dfrac{2x^3}{1-x^2}$ ឃ. $u(t)=1-1.1t+2.54t^2$

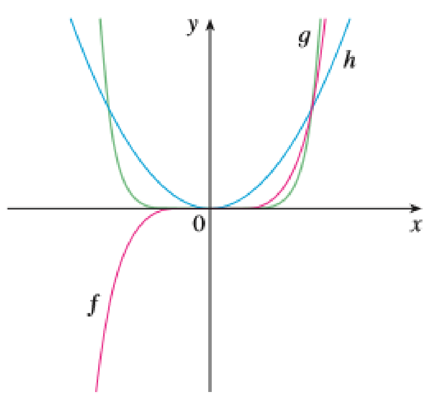
ង. $v(t)=5^t$ ច. $w(\theta)=\sin\theta\cos^2\theta$

2. ក. $y=\pi^x$ ខ. $y=x^\pi$ គ. $y=x^2(2-x^3)$ ឃ. $y=\tan t-\cos t$

ង. $y=\dfrac{s}{1+s}$ ច. $y=\dfrac{\sqrt{x^3-1}}{1+\sqrt[3]{x}}$

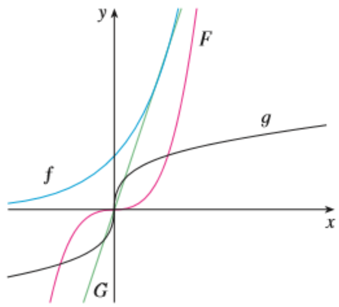
3-4. ភ្ជាប់សមីការនីមួយៗទៅនឹងក្រាបរបស់វា ។ ចូរពន្យល់ពីជម្រើសរបស់អ្នក (កុំប្រើប្រាស់កុំព្យូទ័រ និងម៉ាស៊ីនគូសក្រាប)

3.ក. $h(x)=x^2$ ខ. $f(x)=x^5$ គ. $g(x)=x^8$



(រូបភាពទី 22: ក្រាបអនុគមន៍ f, g និង h)

4.ក. $y=3x$ ខ. $y=3^x$ គ. $y=x^3$ ឃ. $y=\sqrt[3]{x}$



(រូបភាពទី23: ក្រាបអនុគមន៍ $y=3x, y=3^x, y=x^3$ និង $y=\sqrt[3]{x}$)

5.ក. រកសមីការនៃគ្រួសារអនុគមន៍លីនេអ៊ែរដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស ហើយគូសក្រាបសមាជិកនៃគ្រួសារ ។

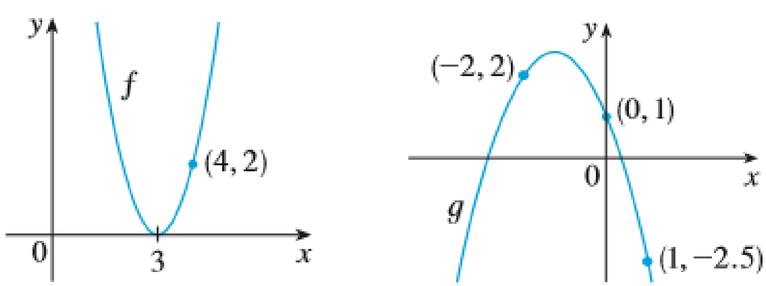
ខ. រកសមីការនៃគ្រួសារអនុគមន៍លីនេអ៊ែរដែល $f(2)=1$ ហើយគូសក្រាបសមាជិកនៃគ្រួសារ ។

គ. តើអនុគមន៍មួយជារបស់គ្រួសារទាំងពីរ ?

6. តើសមាជិកនៃគ្រួសារអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x)=1+m(x+3)$ មាននៅក្នុងអនុគមន៍ធម្មតាទេ ? ចូរគូសក្រាបនៃសមាជិកនៃគ្រួសារអនុគមន៍ ?

7. តើសមាជិកនៃគ្រួសារអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x)=c-x$ មាននៅក្នុងអនុគមន៍ធម្មតាទេ ? ចូរគូសក្រាបនៃសមាជិកនៃគ្រួសារអនុគមន៍ ?

8. រកកន្សោមសមីការកាដ្រាទិចដែលក្រាបត្រូវបានបង្ហាញ



(រូបភាពទី24: ក្រាបនៃអនុគមន៍ ប៉ារ៉ាបូល)

9. រកកន្សោមនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូលកាល់ f បើ $f(1)=6$ $f(-1)=f(0)=f(2)=0$.

10. ការសិក្សាពេលថ្មីបានបង្ហាញថាសីតុណ្ហភាពជាខ្ពស់ជាមធ្យមនៃផែនដីកើតឡើងជាលំដាប់ ។ អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រមួយចំនួនបានប្រើប្រាស់គម្រូសីតុណ្ហភាពដោយអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $T=0.02t+8.50$ ដែល T ជាសីតុណ្ហភាពគិតជា ^0c ហើយ t គិតជាឆ្នាំចាប់ពីឆ្នាំ1900 ។

ក. តើមេគុណប្រាប់ទិស និង T_0 ស្មើប៉ុន្មាន ?

ខ. ប្រើសមីការនេះដើម្បីទស្សន៍ទាយពីសីតុណ្ហភាពខ្ពស់ជាមធ្យមជាសកលក្នុងឆ្នាំ2100 ។

11. ប្រសិនបើការណែនាំដល់យុវជនពីកម្រិតនៃការប្រើប្រាស់គ្រឿងញៀនគឺ D គិតជា mg ។ បន្ទាប់មកកំណត់ពីកម្រិតនៃការប្រើប្រាស់សមរម្យ c ចំពោះកុមារមានអាយុ a ឪសថការីប្រើប្រាស់សមីការគឺ $c=0.0417D(a+1)$ ។ ឧបមាថាកម្រិតនៃការប្រើប្រាស់ចំពោះយុវជនម្នាក់គឺ $200mg$ ។

ក. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាបនៃ c ។ តើវាតាងដោយអ្វី ?

ខ. តើកម្រិតប្រើប្រាស់អ្វីចំពោះកុមារទើបនឹងកើត ?

12. អ្នកគ្រប់គ្រងនៃផ្សារចុងសប្តាហ៍មួយបានឲ្យដឹងពីបទពិសោធន៍កន្លងមកថាប្រសិនគាត់បង់លុយ x ដុល្លារសម្រាប់ជួយកន្លែងមួយនៅផ្សារ នោះចំនួន y កន្លែងដែលគាត់អាចជួលបានឲ្យដោយសមីការ $y=200-4x$ ។

ក. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរនេះ ។ (ត្រូវចាំថាចំនួនប្រាក់ដែលបង់ក្នុងមួយកន្លែង និងចំនួនកន្លែងដែលបានជួលគឺមិនអាចជាចំនួនអវិជ្ជមានទេ) ។

ខ. តើមេគុណប្រាប់ទិស y_0 , x_0 នៃក្រាបស្មើប៉ុន្មាន ?

13. ទំនាក់ទំនងរវាងសីតុណ្ហភាពផារិនហៃ (F) និងសីតុណ្ហភាពសែលស្យ៊ុស (C) សីតុណ្ហភាពដែលបានវាស់ត្រូវបានផ្តល់ដោយអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $F=\frac{9}{5}C+32$ ។

ក. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ. តើអ្វីជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាប ហើយវាតាងដោយអ្វ ?

តើអ្វីជាF-intercept ហើយវាតាងដោយអ្វី ?

14. Jason បានចាកចេញពី Detroit នៅម៉ោង2:00 រសៀលហើយបើកបរក្នុងល្បឿនថេរពីទិសខាងលិចតាមបណ្ដោយផ្លូវ

I-96 ។ គាត់បានឆ្លងកាត់ Ann Arbor ដែលមានចម្ងាយ $40 miles$ ពី Detroit នៅម៉ោង2:50 រសៀល ។

ក. រកកន្សោមនៃចម្ងាយផ្លូវដែលបានធ្វើដំណើរក្នុងរយៈពេលខ្លីនៃពេលកន្លងទៅ ។

ខ. ចូរគូសក្រាបនៃសមីការនៅក្នុងផ្នែក(ក) ។

គ. តើអ្វីជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់នេះ ?តើវាតាងដោយអ្វី ?

15. អ្នកជីវវិទ្យាបានកត់សម្គាល់ឃើញថាអត្រាត្រគៀតស្លាបឃ្មុំរបស់សត្វចង្រិតមួយប្រភេទអាស្រ័យទៅនឹងសីតុណ្ហភាពហើយមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងការកើតឡើងខិតជិតលីនេអ៊ែរ ។ សត្វចង្រិតបង្កើតការត្រគៀតស្លាបឃ្មុំ 113 ដងក្នុងមួយនាទីនៅសីតុណ្ហភាព 70^0F និង 173 ដងក្នុងមួយនាទីនៅសីតុណ្ហភាព 80^0F ។

ក. រកសមីការលីនេអ៊ែរដែលគម្រូសីតុណ្ហភាព T ជាអនុគមន៍នៃចំនួនត្រគៀតស្លាបឃ្មុំក្នុងមួយនាទី ។

ខ. តើមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាបស្មើប៉ុន្មាន ?វាតាងដោយអ្វី ?

គ. ប្រសិនបើសត្វចង្រិតត្រគៀតស្លាបឃ្មុំ 150 ដងក្នុងមួយនាទី ។ ចូរប៉ាន់ស្មានសីតុណ្ហភាព ។

16. អ្នកគ្រប់គ្រងរោងចក្រគ្រឿងសង្ហារឹមមួយបានរកឃើញថាតម្លៃ $\$2200$ សម្រាប់ផលិតបាន 100 កៅអីក្នុងមួយថ្ងៃហើយ $\$4800$ សម្រាប់ផលិតបាន 300 កៅអីក្នុងមួយថ្ងៃ ។

ក. រកតម្លៃជាអនុគមន៍នៃចំនួនកៅអីដែលផលិតបាន ដែលវាសមីការលីនេអ៊ែរ ។ ចូរគូសក្រាប ។

ខ. តើមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាបស្មើប៉ុន្មាន ហើយវាតំណាងឲ្យអ្វី ?

គ. តើ y_0 នៃក្រាបស្មើប៉ុន្មាន ?តើវាតំណាងឲ្យអ្វី ?

17. នៅក្នុងផ្នែកខាងលើនៃមហាសមុទ្រប៉ាស៊ីហ្វិចសម្ពាធទឹកគឺដូចទៅនឹងសម្ពាធខ្យល់នៅចន្លោះទឹក $15lb/in^2$ នៅផ្នែកខាងក្រោមសម្ពាធទឹកកើនឡើង $4.34lb/in^2$ រៀងរាល់ $10\,ft$ នៃសម្ពាធដើម ។

ក. រកសម្ពាធទឹកជាអនុគមន៍នៃជម្រៅពីផ្នែកខាងក្រោមទៅផ្នែកខាងលើនៃមហាសមុទ្រ ។

ខ. តើនៅជម្រៅប៉ុន្មាន ដែលសម្ពាធមានតម្លៃ $100lb/in^2$?

18. តម្លៃប្រចាំខែនៃការបើកបររថយន្តអាស្រ័យទៅចម្ងាយដែលបានបើកបរគិតជា $miles$ ។ Lynn បានរកឃើញថានៅក្នុងខែឧសភាវាមានតម្លៃ $\$380$ ក្នុងការបើកបរចម្ងាយផ្លូវ $480mi$ ហើយនៅក្នុងខែមិថុនាវាមានតម្លៃ $\$460$ ក្នុងការបើកបរចម្ងាយផ្លូវ $800mi$ ។

ក. រកតម្លៃប្រចាំខែ C ជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយផ្លូវដែលបានបើកបរ d ដែលជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរមួយ ដែលទាក់ទងទៅនឹងការផ្ដល់នូវគម្រូសមស្របមួយ ។

ខ. ប្រើផ្នែក(ក)ដើម្បីប៉ាន់ស្មានពីតម្លៃនៃការបើកបរចម្ងាយ $1500miles$ ក្នុងមួយខែ ។

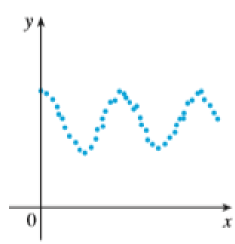
គ. គូសក្រាបនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ។ តើមេគុណប្រាប់ទិសតំណាងឲ្យអ្វី?

ឃ. តើ C_0 តំណាងឲ្យអ្វី?

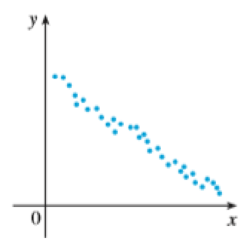
ង. ហេតុអ្វីបានជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរផ្ដល់នូវគម្រូសមស្របមួយក្នុងស្ថានភាពបែបនេះ?

19-20. ចំពោះគម្រូរាយប៉ាយនីមួយៗ តើអនុគមន៍ប្រភេទណាដែលអ្នកនឹងជ្រើសរើសជាគម្រូសម្រាប់ទិន្នន័យ? ចូរពន្យល់ពីជម្រើសរបស់អ្នក ។

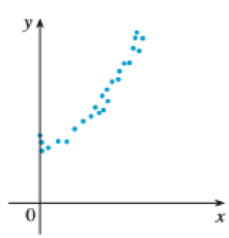
19. ក.



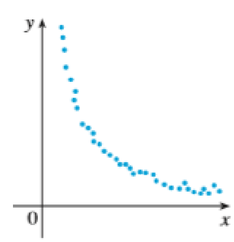
ខ.



20. ក.



ខ.



21. តារាងបានបង្ហាញពីអត្រានៃជម្ងឺដំបៅ(ក្នុងប្រជាជន100នាក់) ចំពោះចំណូលនៃគ្រួសារផ្សេងគ្នា ត្រូវបានធ្វើរបាយការណ៍ដោយការសម្ភាសន៍ស្ទង់មតិដោយសុខភាពជាតិ ។

ចំណូល	អត្រាជំងឺបៅ (ក្នុង 100 នាក់)
\$4,000	14.1
\$6,000	13.0
\$8,000	13.4
\$12,000	12.5
\$16,000	12.0
\$20,000	12.4
\$30,000	10.5
\$45,000	9.4
\$60,000	8.2

ក. បង្កើតគម្រូរាយប៉ាយនៃទិន្នន័យទាំងនេះហើយសម្រេចចិត្តគម្រូលីនេអ៊ែរដែលសមស្រប ។

ខ. រកនិងគូសក្រាបនៃគម្រូលីនេអ៊ែរដែលប្រើសម្រាប់ចំណុចដំបូង និងចំណុចចុងក្រោយនៃទិន្នន័យ ។

គ. រកនិងគូសក្រាបការទោបបំផុតនៃតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ឃ. ប្រើគម្រូលីនេអ៊ែរនៅក្នុងផ្នែក(គ)ដើម្បីប៉ាន់ស្មានអត្រាជម្ងឺជំបៅសម្រាប់ប្រាក់ចំណូល \$25,000 ។

ង. យោងទៅតាមគម្រូ តើនរណាម្នាក់ដែលមានប្រាក់ចំណូល \$80,000 ទទួលរងនូវជម្ងឺជំបៅដោយរបៀបណា ?

ច. តើអ្នកគិតថាវានឹងមានហេតុផលទេដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងគម្រូសម្រាប់នរណាម្នាក់ដែលមានចំណូល \$200,000 ?

22. អ្នកជីវវិទ្យាត្រូវវាបានសង្កេតឃើញថាអត្រាត្រគៀតស្លាបយំរបស់សត្វចង្រិតមួយប្រភេទអាស្រ័យទៅនឹងសីតុណ្ហភាព ។ តារាងខាងក្រោមបានបង្ហាញពីអត្រាត្រគៀតស្លាបយំសម្រាប់សីតុណ្ហភាពផ្សេងគ្នា ។

សីតុណ្ហភាព (°F)	អត្រាយំ (យំ/នាទី)	សីតុណ្ហភាព (°F)	អត្រាយំ (យំ/នាទី)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

ក. ចូរបង្កើតនូវគម្រូរាយប៉ាយនៃទិន្នន័យគម្រូ

ខ. រកនិងគូសក្រាបនៃតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

គ. ប្រើប្រាស់គម្រូលីនេអ៊ែរក្នុងផ្នែក(ខ)ដើម្បីប៉ាន់ស្មានពីអត្រាត្រគៀតស្លាបនៅសីតុណ្ហភាព 100^0F ។

23. តារាងខាងក្រោមបសនផ្ដល់ពីជ័យជម្នះក្នុងការលោតកម្ពស់ក្នុងកម្មវិធីការប្រកួតកីឡាអូឡាំពិចបុរស ឆ្ពោះទៅកាន់ឆ្នាំ2004 ។

ឆ្នាំ	កម្ពស់ (m)	ឆ្នាំ	កម្ពស់ (m)
1896	3.30	1960	4.70
1900	3.30	1964	5.10
1904	3.50	1968	5.40
1908	3.71	1972	5.64
1912	3.95	1976	5.64
1920	4.09	1980	5.78
1924	3.95	1984	5.75
1928	4.20	1988	5.90

1932	4.31	1992	5.87
1936	4.35	1996	5.92
1948	4.30	2000	5.90
1952	4.55	2004	5.95
1956	4.56		

ក. ចូរបង្កើតគម្រូរាយប៉ាយហើយសម្រេចថាគម្រូលីនេអ៊ែរគឺសមស្រប ។

ខ. ចូររកនិងគូសក្រាបនៃតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

គ. ប្រើប្រាស់គម្រូលីនេអ៊ែរដើម្បីទស្សទាយពីការឈ្នះនូវការលោតកម្ពស់នៅឆ្នាំ2008 នៅកីឡាអូឡាំពិច ហើយប្រៀបធៀបទៅនឹងការឈ្នះនៃការលោតកម្ពស់ពិត $5.96m$ ។

ឃ. តើមានមូលហេតុទេក្នុងការប្រើប្រាស់គម្រូដើម្បីទាយពីការឈ្នះនៃការលោតកម្ពស់នៅឆ្នាំ2100 ក្នុងកីឡាអូឡាំពិច ?

24. តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីភាគរយនៃប្រជាជនប្រទេសអាហ្សង់ទីនដែលបានរស់ជនបទពីឆ្នាំ1955 ដល់ឆ្នាំ2000 ។ ចូររកគម្រូសម្រាប់ទិន្នន័យហើយប្រើវាដើម្បីប៉ាន់ស្មានពីភាគរយនៃប្រជាជនរស់នៅជនបទក្នុងឆ្នាំ1988 និងឆ្នាំ2002 ។

ឆ្នាំ	ភាគរយ	ឆ្នាំ	ភាគរយ
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

25. បរិមាណនៃរាងកាយជាច្រើនត្រូវបានតភ្ជាប់ដោយច្បាប់បញ្ច្រាសការេគឺអនុគមន៍ស្វ័យគុណមានទម្រង់ $f(x)=kx^{-2}$ ជាពិសេសការស្រាយបំភ្លឺពីគោលបំណងមួយដោយប្រភពពន្លឺគឺច្រាសសមាមាត្រទៅនឹងការេនៃចម្ងាយពីប្រភពពន្លឺ ។ ឧបមាថាបន្ទាប់ពីងងឹតអ្នកនៅក្នុងបន្ទប់ជាមួយនឹងចង្កៀងមួយហើយព្យាយាមអានសៀវភៅ ។ ភ្លើងក៏ស្រអាប់ផងដែរហើយដូច្នេះអ្នកត្រូវទម្លាក់ចង្កៀងចុះពាក់កណ្តាល ។ តើភ្លើងត្រូវភ្លឺកម្រិតប៉ុន្មាន ?

26. វាបានបង្កើតន័យថាតំបន់ធំនៃតំបន់មួយចំនួនដ៏ធំនៃប្រភេទនេះគឺថាការរស់នៅក្នុងតំបន់ ។ អ្នកបរិស្ថានវិទ្យាមានប្រភេទគម្រូនៃប្រភេទតំបន់ដែលទាក់ទងទៅនឹងអនុគមន៍ស្វ័យគុណមួយហើយជាពិសេសចំនួននៃប្រភេទ S នៃការរស់នៅរបស់សត្វប្រជៀវនៅក្នុងរូងភ្នំនៅកណ្តាលប្រទេសម៉ិចស៊ិចកូត្រូវបានទាក់ទងទៅផ្នែកខាងលើនៃផ្ទៃ A នៃរូងភ្នំតាងដោយសមីការ $S=0.7A^{0.3}$ ។

ក. រូងភ្នំនេះត្រូវបានគេហៅថា Mision Imposible នៅជិត Puebla ប្រទេសម៉ិចស៊ិចកូ មានផ្ទៃខាងលើ $A=60m^2$ ។ តើមានសត្វប្រជៀវប៉ុន្មានប្រភេទដែលអ្នករំពឹងថានឹងរកឃើញនៅក្នុងរូងភ្នំ ?

ខ. ប្រសិនបើអ្នករកឃើញសត្វប្រជៀវបួនប្រភេទរស់នៅក្នុងរូងភ្នំ ចូរប៉ាន់ស្មានពីផ្ទៃក្រឡានៃរូងភ្នំនោះ ។

27. តារាងខាងក្រោមបានបង្ហាញពីចំនួន N នៃប្រភេទសត្វល្មូន និងសត្វAmphibian ដែលរស់នៅកោះ caribbean ហើយផ្ទៃនៃកោះនោះគិតជា $miles^2$ ។

កោះ	A	N
Saba	4	5
Monserrat	40	9
Puerto Rico	3,459	40
Jamaica	4,411	39
Hispaniola	29,418	84
Cuba	44,218	76

ក. ប្រើអនុគមន៍ស្វ័យគុណតាងគម្រូ N ជាអនុគមន៍នៃ A ។

ខ. កោះcaribbeanនៃDominicaមានផ្ទៃក្រឡា $291m^2$ ។ តើមានប្រភេទសត្វល្មូន និងAmphibians ប៉ុន្មានប្រភេទដែលអ្នកនឹងរំពឹងថារកឃើញនៅDominica ?

28. តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីចម្ងាយជាមធ្យមពីភពទៅព្រះអាទិត្យ (យកការវាស់ចម្ងាយពីផែនដីទៅព្រះអាទិត្យ) ហើយរយៈពេល T (រយៈពេលនៃការផ្លាស់ប្តូរឆ្នាំ) ។

ភព	d	T
ពុធ	0.387	0.241
សុក្រ	0.723	0.615
ផែនដី	1.000	1.000
អង្គារ៍	1.523	1.881
ព្រហស្បត្តិ៍	5.203	11.861
សៅរ៍	9.541	29.457
អុយរ៉ានុស	19.190	84.008
ណេបទូន	30.086	164.784

ក. ចូរបង្កើតគម្រូស្វ័យគុណចំពោះទិន្នន័យខាងលើ

ខ. ច្បាប់ទី3 កេព្លែនៃចលនាភពបានពោលថា " ការេនៃការប្រែប្រួលរយៈពេលនៃភពគឺសមាមាត្រទៅនឹងចម្ងាយពីព្រះអាទិត្យលើកជាគូប" ។ តើគម្រូរបស់អ្នកអាចបញ្ជាក់ពីច្បាប់ទី3 កេព្លែបានទេ ?

១.៣. អនុគមន៍ថ្មីបង្កើតដោយអនុគមន៍ចាស់

នៅក្នុងចំណុចនេះយើងនឹងចាប់ផ្តើមជាមួយមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃអនុគមន៍ដែលបានពិភាក្សានៅចំណុច1.2 ហើយទទួលបានអនុគមន៍ថ្មីដោយការប្តូរ ការពង្រីក និងភាពឆ្លុះគ្នានៃក្រាបរបស់វា ។ យើងក៏បង្ហាញពីវិធីក្នុងការដាក់បញ្ចូលគ្នានៃគូរអនុគមន៍នព្វន្តស្តង់ដានិងដោយការតាក់តែង ។

*អនុគមន៍បម្លែង

ការបម្លែងដាក់ស្តែងទៅកាន់ក្រាបដែលបានផ្តល់ឲ្យយើងទទួលបាននូវក្រាបពិតប្រាកដទាក់ទងទៅនឹងអនុគមន៍ និងផ្តល់ឲ្យយើងនូវសមត្ថភាពក្នុងការគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ជាច្រើនបានយ៉ាងលឿនដោយដៃ ។ ដំបូងយើងគិតទៅលើការបកប្រែ ប្រសិនបើ c ជាចំនួនវិជ្ជមាននោះក្រាបនៃ $y=f(x)+c$ គឺគ្រាន់តែជាក្រាបនៃ $y=f(x)$ ដោយរំកិលឡើងលើចម្ងាយ c ឯកតា(ព្រោះតម្លៃអ័ក្ស y នីមួយៗកើតឡើងដូចតម្លៃ c) ។ ដូចគ្នានេះដែរប្រសិនបើ $g(x)=f(x-c)$ ដែល $c>0$ នោះតម្លៃនៃ $g(x)$ ដូចនឹងតម្លៃ $f(x-c)$ (រំកិល c ឯកតាទៅឆ្វេងអ័ក្ស x) ។ ដូច្នេះក្រាបនៃ $y=f(x-c)$ គឺគ្រាន់តែជាក្រាបនៃ $y=f(x)$ ដោយរំកិល c ឯកតាទៅស្តាំ(មើលរូបភាពទីមួយ) ។

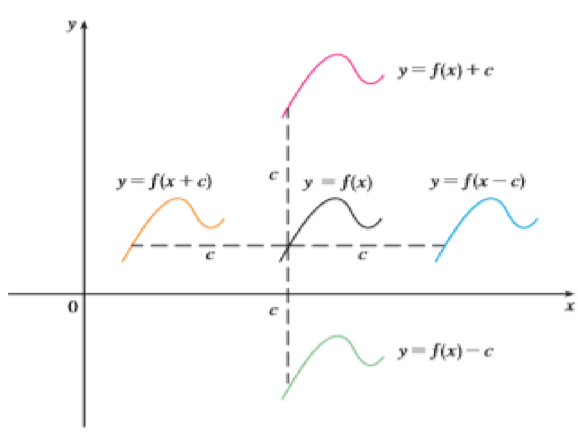
ការរំកិលទៅលើអ័ក្សដេក និងអ័ក្សឈរ ឧបមាថា $c>0$ ។ ដើម្បីទទួលបានក្រាបនៃ

$y=f(x)+c$ បានរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ចំនួន c ឯកតាទៅលើ

$y=f(x)-c$ បានរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ចំនួន c ឯកតាទៅក្រោម

$y=f(x-c)$ បានរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ចំនួន c ឯកតាទៅស្តាំ

$y=f(x+c)$ បានរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ចំនួន c ឯកតាទៅឆ្វេង



(រូបភាពទី1: ខ្សែកោងបម្លែងកិល)

ប្រសិនបើ $c>1$ នោះក្រាបនៃ $y=cf(x)$ ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺពង្រីកមួយកត្តានៃ c តាមទិសឈរ(ព្រោះអ័ក្ស y នីមួយៗគឺត្រូវបានគុណដូចគ្នានឹងចំនួន c) ។ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=-f(x)$ គឺជាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ឆ្លុះជាមួយអ័ក្ស x ព្រោះចំណុច (x,y) គឺត្រូវបានផ្លាស់ទីតាំងដោយចំណុច $(x,-y)$ ។ (មើលរូបភាពទី2 ហើយនឹងតារាងដែលជាលទ្ធផលនៃការពង្រីកផ្សេងទៀត ការបង្រួមហើយឆ្លុះចំពោះការបម្លែងត្រូវបានផ្តល់ឲ្យផងដែរ) ។

ការពង្រីក និងភាពឆ្លុះនៃអ័ក្សដេកនឹងអ័ក្សឈរ ឧបមាថា $c>1$ ។ ដើម្បីទទួលបានក្រាបនៃ

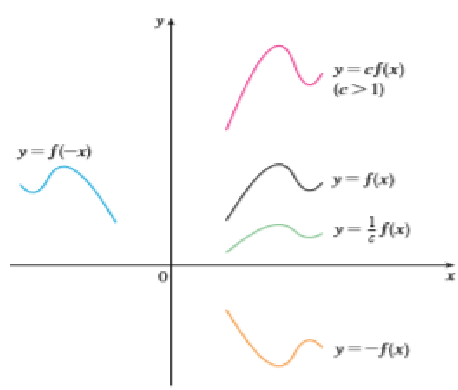
$y=cf(x)$ ពង្រីកក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ មួយកត្តានៃ c នៅលើអ័ក្សឈរ

$y=\frac{1}{c}f(x)$ បង្រួមក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ មួយកត្តានៃ c នៅលើអ័ក្សឈរ

$y=f(cx)$ បង្រួមក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ មួយកត្តានៃ c នៅលើអ័ក្សដេក

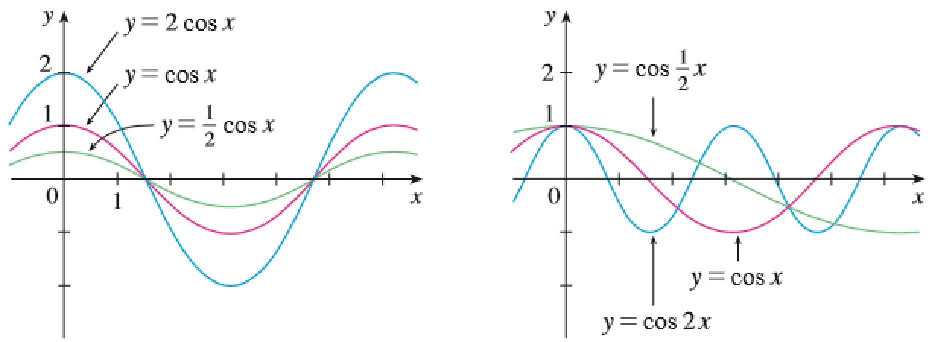
$y=-f(x)$ ឆ្លុះទៅនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ធៀបទៅនឹងអ័ក្ស x

$y=f(-x)$ ឆ្លុះទៅនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ធៀបទៅនឹងអ័ក្ស y



(រូបភាពទី2: ក្រាបនៃបំលែងអនុគមន៍ដោយមេគុណ c)

រូបភាពទី3 បានបង្ហាញពីការពង្រីកក្នុងការបម្លែងទាំងនេះនៅពេលដែលអនុវត្តន៍ទៅលអនុគមន៍ $\cos$ ជាមួយនឹង $c=2$ ។ ជាឧទាហរណ៍ដើម្បីបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2\cos x$ យើងត្រូវគុណអ័ក្ស y នៃចំណុចនីមួយៗនៅលើក្រាប $y=\cos x$ ជាមួយនឹង 2 ។ នេះមានន័យថាក្រាបនៃអនុគមន៍ បានពង្រីកនៅលើអ័ក្សឈរចំនួនពីរឯកតា ។

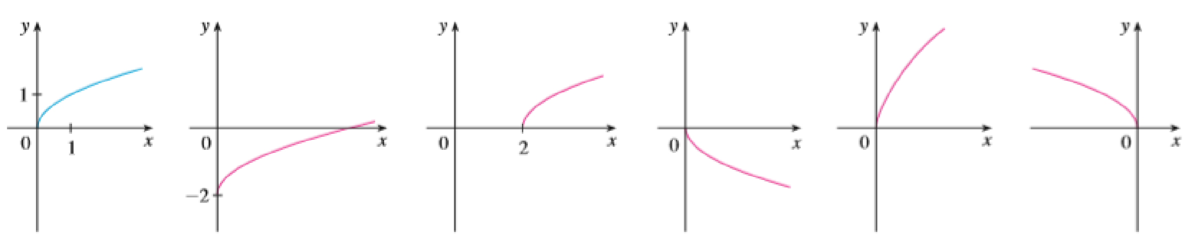


(រូបភាពទី3: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = c\cdot\cos x$ និង $y = \cos cx$)

ឧទាហរណ៍ទី1 : គេឱ្យក្រាប $y=\sqrt{x}$ ប្រើការបម្លែងដើម្បីបានក្រាប $y=\sqrt{x}-2, y=\sqrt{x-2}, y=-\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$ និង $y=\sqrt{-x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក្រាបនៃអនុគមន៍ឫសការេ $y=\sqrt{x}$ ទទួលបានពីរូបភាពទី13(ក) ក្នុងចំណុច1.2 គឺត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី4(ក) ។ ក្នុងផ្នែកផ្សេងនៃរូបភាពយើងគូស $y=\sqrt{x}-2$ ដោយរំកិល 2 ឯកតាចុះក្រោម $y=\sqrt{x-2}$ ដោយរំកិល 2 ឯកតាទៅស្តាំ $y=-\sqrt{x}$ ដោយឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស x $y=2\sqrt{x}$ ពង្រីកលើអ័ក្សឈរ 2 ឯកតាហើយ $y=\sqrt{-x}$ ដោយឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស y ។



(រូបភាពទី4: ក្រាបអនុគមន៍ រឹសការេ)

ក. $y=\sqrt{x}$ ខ. $y=\sqrt{x}-2$ គ. $y=\sqrt{x-2}$ ឃ. $y=-\sqrt{x}$ ង. $y=2\sqrt{x}$ ច. $y=\sqrt{-x}$

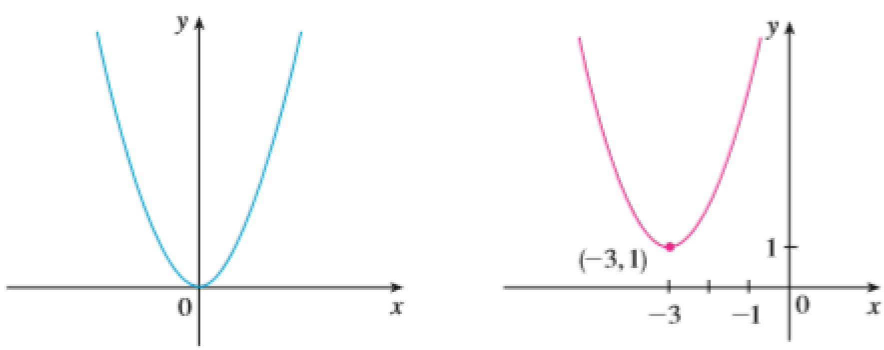
ឧទាហរណ៍ទី2 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2+6x+10$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរជាទម្រង់ការេ យើងសរសេរសមីការនៃក្រាបជា $y=x^2+6x+10=(x+3)^2+1$

នេះមានន័យថាយើងបានក្រាបដោយចាប់ផ្តើមជាមួយនឹងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ហើយរំកិល 3 ឯកតាទៅឆ្វេង ហើយ 1 ឯកតាទៅលើ(មើលរូបទី5)

(រូបភាពទី5)

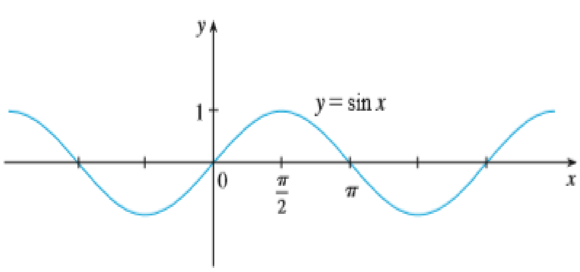


ក. $y=x^2$ ខ. $y=x^2+6x+10$

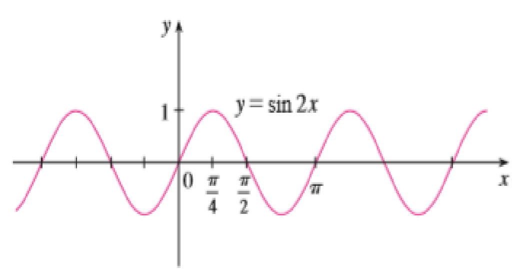
ឧទាហរណ៍ទី3 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក. $y=\sin 2x$ ខ. $y=1-\sin x$

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin 2x$ ពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ ដោយរំកិលថយក្រោមចំនួន 2 ឯកតានៅលើអ័ក្សដេក ។ (មើលរូបភាពទី6 និងទី7) ដូច្នេះខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ គឺ 2π ហើយខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin 2x$ គឺ $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ។

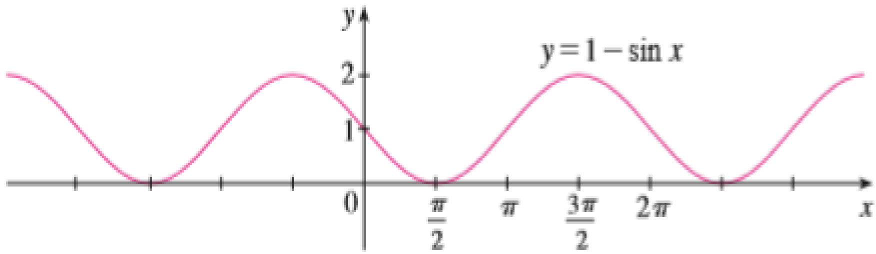


(រូបភាពទី6: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$)



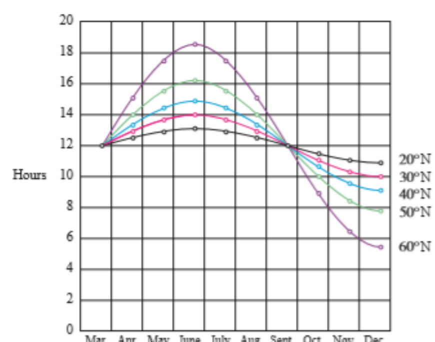
(រូបភាពទី7: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin 2x$)

ខ. យើងបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=1-\sin x$ យើងចាប់ផ្តើមម្តងទៀតជាមួយអនុគមន៍ $y=\sin x$ ។ យើងធ្វើឱ្យឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស x នោះទទួលបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=-\sin x$ ហើយបន្ទាប់មកយើងពង្រីកឡើងលើមួយឯកតានោះយើងបានក្រាប $y=1-\sin x$ ។ (មើលរូបភាពទី8)



(រូបភាពទី8: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=1-\sin x$)

ឧទាហរណ៍ទី4 : រូបភាពទី9 បង្ហាញពីក្រាបនៃចំនួនម៉ោងនៃពន្លឺថ្ងៃជាអនុគមន៍នៃពេលនៃឆ្នាំនៅរយៈទទឹង ។ បានផ្តល់ថាphiladelpia ជាគឺមានទីតាំងស្ថិតនៅប្រមាណ 40^0N នៃរយៈទទឹង ។ រកអនុគមន៍ជាគម្រូនៃប្រវែងពន្លឺថ្ងៃនៅphiladelphia ។



(រូបភាពទី3: ចំនួនម៉ោងនៃពន្លឺថ្ងៃជាអនុគមន៍នៃពេលនៃឆ្នាំនៅរយៈទទឹង)

ដំណោះស្រាយ

សម្គាល់ថាចំណុចកោងនីមួយៗប្រហាក់ប្រហែលទៅនឹងការរំកិល និងការពង្រីកក្រាបនៃអនុគមន៍ $\sin$ ។ ដោយមើលទៅលើខ្សែកោងពណ៌ខៀវយើងឃើញថានៅរយៈទទឹងនៃphiladelphia ពន្លឺថ្ងៃចុងក្រោយប្រហែល 14.8 ម៉ោងនៅថ្ងៃទី21ខែឧសភា និង 9.2 ម៉ោងនៅថ្ងៃទី21ខែវិច្ឆិកា ។ ដូច្នេះទំហំនៃខ្សែកោង(ឯកតាដែលយើងត្រូវរំកិលខ្សែកោង $\sin$ នៅលើអ័ក្សឈរគឺ $\frac{1}{2}(14.8-9.2)=2.8$ ។ តើយើងត្រូវរំកិលខ្សែកោង $\sin$ ប៉ុន្មានឯកតានៅលើអ័ក្សដេកប៉ុន្មានឯកតាបើយើងវាស់រយៈពេល t គិតជាថ្ងៃ ? ព្រោះមាន 365 ថ្ងៃក្នុងមួយឆ្នាំ ខួបនៃគម្រូយើងគឺ 365 ។ ក៏ប៉ុន្តែខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin t$ គឺ 2π ដូចនេះការរំកិលឯកតានៅលើអ័ក្សដេកគឺ $c=\frac{2\pi}{365}$ ។

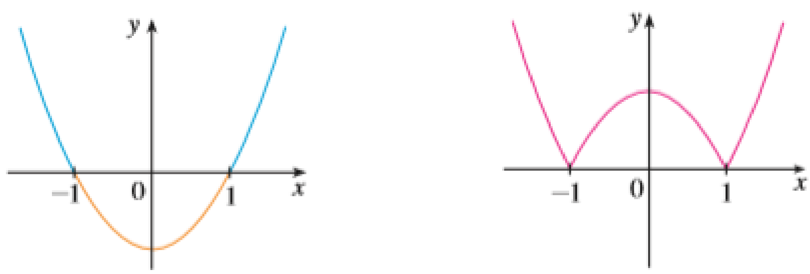
ប្រសិនបើ $y=|f(x)|$ ដោយផ្អែកទៅលើនិយមន័យតម្លៃដាច់ខាត $y=f(x)$ នៅពេលដែល $f(x)\geq 0$ ហើយ $y=-f(x)$ នៅពេលដែល $f(x)<0$ ។ នេះប្រាប់យើងពីវិធីបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=|f(x)|$ ពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$: ផ្នែកនៃក្រាបដែលស្ថិតនៅចន្លោះអ័ក្ស x ដែលនៅសល់ដូចទៅនឹងផ្នែកខាងក្រោមអ័ក្ស x គឺត្រូវបានឆ្លុះទៅនឹងអ័ក្ស x ។

ឧទាហរណ៍ទី5 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=|x^2-1|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងប្រើក្រាបប៉ារ៉ាបូល $y=x^2-1$ នៅក្នុងរូបភាពទី10(ក) ដោយរំកិលប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ចុះក្រោមមួយឯកតា ។ យើងឃើញថាក្រាបស្ថិតនៅក្រោមអ័ក្ស x ពេល $-1<x<1$ ដូច្នេះយើងឃើញថាផ្នែកខ្លះនៃក្រាបឆ្លុះទៅនឹងអ័ក្ស x ដើម្បីទទួលបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=|x^2-1|$ ។

(រូបភាពទី4: ក្រាបអនុគមន៍ $y=x^2-1$ និង $y=|x^2-1|$)



ក. $y=x^2-1$ ខ. $y=|x^2-1|$

*អនុគមន៍រួមបញ្ចូលគ្នា

អនុគមន៍ពីរ f និង g អាចរួមបញ្ចូលគ្នាទៅជាទម្រង់នៃអនុគមន៍មួយថ្មីគឺ $f+g, f-g, fg$ និង $\frac{f}{g}$ នៅក្នុងលក្ខណៈស្រដៀងគ្នាទៅនឹងវិធីបូក ដក គុណ ហើយនឹងចែកចំនួនពិតដែរ ។ ផលបូកនៃអនុគមន៍ផ្សេងគ្នាត្រូវបានកំណត់ដោយ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ប្រសិនបើដែនកំណត់នៃ f គឺ A ហើយដែនកំណត់នៃ g គឺ B នោះដែនកំណត់នៃ $f+g$ គឺប្រសព្វគ្នា $A\cap B$ ព្រោះអនុគមន៍ទាំងពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ត្រូវវាបានកំណត់ ។ ជាឧទាហរណ៍ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}$ គឺ $A=[0,+\infty)$ ហើយដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g(x)=\sqrt{2-x}$ គឺ $B=(-\infty,2]$

ដូច្នេះដែនកំណត់នៃ $(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ គឺ $A\cap B=[0,2]$ ។ ស្រដៀងទៅនឹងអនុគមន៍បង្កើតដំបូងនឹងអនុគមន៍ដែលនៅសល់ត្រូវបានកំណត់ដោយ

$$(fg)=f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ fg គឺ $A\cap B$ ក៏ប៉ុន្តែយើងមិនអាចចែកនឹង 0 ហើយដូច្នេះដែនកំណត់នៃ $\frac{f}{g}$ គឺ $\{x\in A\cap B/\,g(x)\neq 0\}$ ។ ជាឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើ $f(x)=x^2$ និង $g(x)=x-1$ នោះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍សនិទាន $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{(x-1)}$ គឺ $\{x/\,x\neq 1\}$ ឬក៏ $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ។

ឧទាហរណ៍ ឧបមាថា $y=f(u)=\sqrt{u}$ និង $u=g(x)=x^2+1$ ។ y ជាអនុគមន៍នៃ u ហើយ u ជាអនុគមន៍នៃ x ហើយចុងក្រោម y ក៏ជាអនុគមន៍នៃ x ដែរ ។ យើងគណនានេះដោយជំនួស :

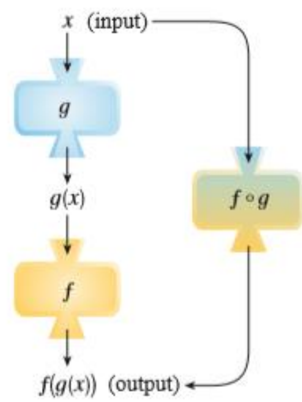
$$y=f(u)=f(g(x))=f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}$$

វិធីនេះត្រូវបានគេហៅថាសមាសភាពព្រោះអនុគមន៍ថ្មីមួយគឺត្រូវបានផ្សំពីអនុគមន៍ពីរដែលឲ្យគឺ f និង g ។

ជាទូទៅអនុគមន៍ដែលផ្តល់ឲ្យ f និង g យើងចាប់ផ្តើមជាមួយមួយគឺ x ក្នុងដែនកំណត់នៃ g ហើយរករូបភាពនៃ $g(x)$ ។ ប្រសិនបើចំនួន $g(x)$ នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f នោះយើងអាចគណនាតម្លៃនៃ $f(g(x))$ ។ សម្គាល់ថាធាតុចេញនៃអនុគមន៍មួយបម្រើជាធាតុចូលនៃអនុគមន៍បន្ទាប់ ។ លទ្ធផលគឺអនុគមន៍ថ្មីមួយ $h(x)=f(g(x))$ បានដោយការជំនួស g ចូលទៅក្នុង f ។ វាត្រូវបានគេហៅថាជាអនុគមន៍បណ្តាក់នៃ f និង g ហើយត្រូវបានតាងដោយ fog ។

និយមន័យ : គេឲ្យអនុគមន៍ពីរ f និង g អនុគមន៍សមាស fog (ត្រូវបានហៅថាជាអនុគមន៍បណ្តាក់នៃ f និង g) ត្រូវបានកំណត់ដោយ $(fog)(x)=f(g(x))$ ។

ដែនកំណត់នៃ fog គឺកំណត់គ្រប់ x ក្នុងដែនកំណត់នៃ g ដូចជា $g(x)$ នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f ។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀត $(fog)(x)$ គឺត្រូវបានកំណត់នៅពេលដែលអនុគមន៍ទាំងពីរ $g(x)$ និង $f(g(x))$ ត្រូវបានកំណត់ ។ រូបភាពទី5 បង្ហាញពីរូបភាពនៃ fog ក្នុងដំណើរការម៉ាស៊ីនរយៈពេលខ្លី ។



(រូបភាពទី5: ដ្យាក្រមបណ្ដាក់នៃអនុគមន៍)

ឧទាហរណ៍ទី6 : បើ $f(x)=x^2$ និង $g(x)=x-3$ ។ រកអនុគមន៍ fog និង gof ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(fog)(x)=f(g(x))=f(x-3)=(x-3)^2$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2-3$$

សម្គាល់ : អ្នកអាចមើលនៅឧទាហរណ៍ទី6 ជាទូទៅ $fog\neq gof$ ។ ចូរចងចាំថាការកំណត់ fog មានន័យថាអនុគមន៍ g ត្រូវបានអនុវត្តន៍ដំបូងហើយអនុគមន៍ f ត្រូវបានអនុវត្តន៍ទី2 ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ទី6 fog គឺជាអនុគមន៍ដែលដំបូងដក 3 ហើយបន្ទាប់មកលើកជាការេ ចំណែកឯ gof គឺជាអនុគមន៍ដែលដំបូងលើកជាការេហើយបន្ទាប់មកដក 3 ។

ឧទាហរណ៍ទី7 : បើ $f(x)=\sqrt{x}$ ហើយ $g(x)=\sqrt{2-x}$ ។ រកអនុគមន៍នីមួយៗហើយនឹងដែនកំណត់របស់វា ។

ក. fog ខ. gof គ. fof ឃ. gog

ដំណោះស្រាយ

ក. $(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{\sqrt{2-x}}=\sqrt[4]{2-x}$

ដែនកំណត់នៃ fog គឺ $\{x/2-x\geq 0\}=\{x/x\leq 2\}=(-\infty,2]$

ខ. $(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{2-\sqrt{x}}$

ចំពោះ $\sqrt{x}$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ $x \ge 0$ ។ ចំពោះ $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ $2-\sqrt{x} \ge 0$ នោះ $\sqrt{x} \le 2$ ឬក៏ $x \le 4$ ។ ដូច្នេះយើងមាន $0 \le x \le 4$ ដូចនេះដែនកំណត់នៃ gof ត្រូវស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[0,4]$ ។

គ. $(fof)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

ដែនកំណត់នៃ fof គឺ $[0,+\infty)$ ។

ឃ. $(gog)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$

កន្សោមនេះត្រូវបានកំណត់នៅពេលដែល $2-x \ge 0$ និង $2-\sqrt{2-x} \ge 0$ ។ វិសមីការទី1 មានន័យថា $x \le 2$ ហើយវិសមីការទី2 គឺ $\sqrt{2-x} \le 2$ ឬក៏ $2-x \le 4$ ឬក៏ $x \ge -2$ ។ នោះ $-2 \le x \le 2$ ដូចនេះដែនកំណត់នៃ gog គឺស្ថិតនៅចន្លោះ $[-2,2]$ ។

វាអាចទៅរួចដើម្បីការបង្កើតអនុគមន៍មួយនៃអនុគមន៍ពីរ ឬច្រើន។ ជាឧទាហរណ៍អនុគមន៍ផ្សំគ្នាគឺ $fogoh$ ត្រូវវាបានរកដោយការអនុវត្តទី1 h បន្ទាប់មក g ហើយបន្ទាប់មកទៀត f ដូចខាងក្រោម :

$$(fogoh)(x) = f\left(g(h(x))\right)$$

ឧទាហរណ៍ទី 8 : រកអនុគមន៍ $fogoh$ បើ $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, g(x) = x^{10}$ និង $h(x) = x+3$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$(fogoh)(x) = f\left(g(h(x))\right) = f\left(g(x+3)\right)$$

$$= f\left((x+3)^{10}\right) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

ពេលនេះយើងត្រូវប្រើនូវអនុគមន៍ប្រភេទនេះក្នុងបង្កើតអនុគមន៍ស្មុគស្មាញពីអនុគមន៍ងាយមួយ ។ ប៉ុន្តែនៅក្នុងការគណនាវាតាមធម្មតាគេអាចប្រែក្លាយអនុគមន៍ស្មុគស្មាញទៅជាអនុគមន៍ងាយបាន ។ ដូចឧទាហរណ៍ខាងក្រោម

ឧទាហរណ៍ទី9 : គេឲ្យ $F(x) = \cos^2(x+9)$ ។ ចូររកអនុគមន៍ f, g និង h ដែល $F = fogoh$ ។

ដំណោះស្រាយ

$F(x)=[\cos(x+9)]^2$ តាមរូបមន្តនៃ F គឺអាចនិយាយបានថា :

ដំបូងបូក 9 បន្ទាប់យកចម្លើយនៃ $\cos$ ទៅលើកជាការេ ។ ដូចនេះយើងតាង $h(x)=x+9$

$g(x)=\cos x \qquad f(x)=x^2$

នោះ $(fogoh)(x)=f\left(g(h(x))\right)=f\left(g(x+9)\right)=f\left(\cos(x+9)\right)=[\cos(x+9)]^2=F(x)$

លំហាត់

1.ឧបមាថាក្រាបនៃអនុគមន៍ f ត្រូវបានគេឲ្យ ។ សរសេរសមីការចំពោះក្រាបដែលទទួលបានពីក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម:

ក. ពង្រីកឡើងលើ 3 ឯកតា ខ. ពង្រីកចុះក្រោម 3 ឯកតា

គ. ពង្រីកទៅស្តាំ 3 ឯកតា ឃ. ពង្រីកទៅឆ្វេង 3 ឯកតា

ង. ឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស x ច. ឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស y

ឆ. រំកិលលើអ័ក្សឈរ 3 ឯកតា ជ. បង្រួញលើអ័ក្សឈរ 3 ឯកតា ។

2.ចូរពន្យល់វិធីដែលក្រាបនីមួយៗទទួលបានពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$

ក. $y=f(x)+8$ ខ. $y=f(x+8)$

គ. $y=6f(x)$ ឃ. $y=f(8x)$

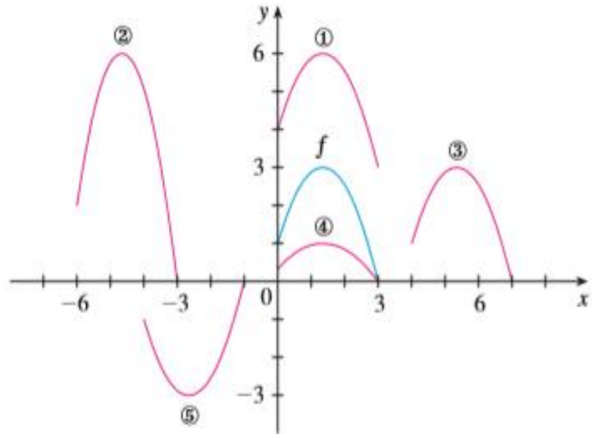
ង. $y=-f(x)-1$ ច. $y=8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

3.គេឱ្យក្រាបនៃ $y=f(x)$ ។ ចូរភ្ជាប់សមីការនីមួយៗទៅនឹងក្រាបរបស់វាហើយផ្តល់ហេតុផលចំពោះជម្រើសរបស់អ្នក ។

ក. $y=f(x-4)$ ខ. $y=f(x)+3$

គ. $y=\frac{1}{3}f(x)$ ឃ. $y=-f(x+4)$

ង. $y=2f(x+6)$

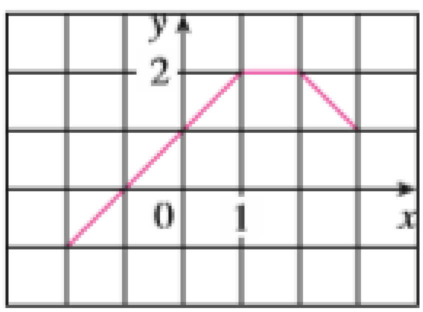


(រូបភាពទី6: ក្រាបអនុគមន៍ f)

4.គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។ ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម ។

ក. $y = f(x) - 2$ ខ. $y = f(x-2)$

គ. $y = -2f(x)$ ឃ. $y = f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$

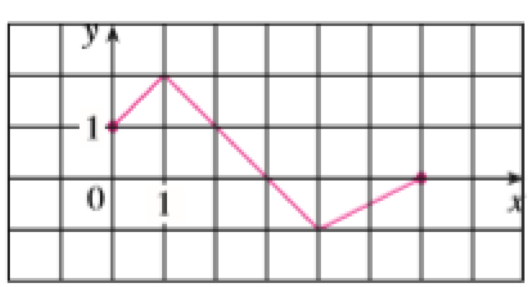


(រូបភាពទី7:ក្រាបនៃអនុគមន៍ f)

5.គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។ ប្រើប្រាស់វាដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម ។

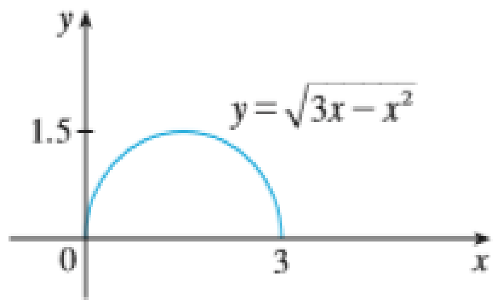
ក. $y = f(2x)$ ខ. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

គ. $y = f(-x)$ ឃ. $y = -f(-x)$



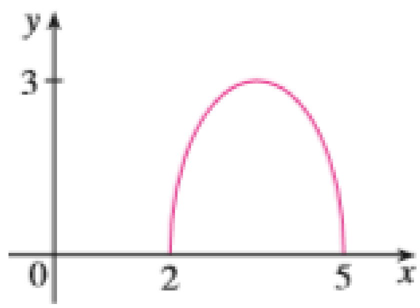
(រូបភាពទី8: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f)

6-7.គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{3x-x^2}$ ។ ប្រើប្រាស់ការបម្លែងដើម្បីបង្កើតអនុគមន៍មួយដែលក្រាបត្រូវបានបង្ហាញ



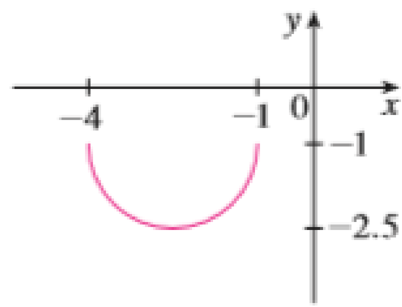
(រូបភាពទី9: ក្រាបនៃអនិគមន៍ $y=\sqrt{3x-x^2}$)

6.



(រូបភាពទី10: ក្រាបអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល)

7.



(រូបភាពទី11: ក្រាប)

8.ក. តើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2\sin x$ ទាក់ទៅនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ យ៉ាងដូចម្តេច?ប្រើចម្លើយរបស់អ្នក និងរូបភាពទី6 ដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2\sin x$ ។

ខ. តើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=1+\sqrt{x}$ ទាក់ទៅនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ យ៉ាងដូចម្តេច?ប្រើចម្លើយរបស់អ្នក និងរូបភាពទី6 ដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=1+\sqrt{x}$ ។

9-24. ក្រាបនៃអនុគមន៍គូសដោយដៃ មិនមានចំណុចរាយប៉ាយប៉ុន្តែចាប់ផ្តើមជាមួយក្រាបមួយក្នុងចំណោមក្រាបស្តង់ដាដែលគេឱ្យនៅក្នុងចំណុច1.2 ហើយបន្ទាប់មកអនុវត្តន៍ការបម្លែងសមស្របមួយ ។

9. $y=\dfrac{1}{x+2}$ 10. $y=(x-1)^3$

11. $y=-\sqrt[3]{x}$ 12. $y=x^2+6x+4$

13. $y=\sqrt{x-2}-1$ 14. $y=4\sin 3x$

15. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ 16. $y=\frac{2}{x}-2$

17. $y=\frac{1}{2}(1-\cos x)$ 18. $y=1-2\sqrt{x+3}$

19. $y=1-2x-x^2$ 20. $y=|x|-2$

21. $y=|x-2|$ 22. $y=\frac{1}{4}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

23. $y=\left|\sqrt{x}-1\right|$ 24. $y=|\cos\pi x|$

25.ទីក្រុងនៃNew Orleans មានទីតាំងស្ថិតនៅរយៈទទឹង 30^0N ។ ប្រើរូបភាពទី9 ដើម្បីរកអនុគមន៍ដែលជាគម្រូនៃចំនួនម៉ោងនៃពន្លឺថ្ងៃនៅNew Orleans ជាអនុគមន៍នៃរយៈពេលនៃឆ្នាំ ។ ពិនិត្យភាពត្រឹមត្រូវនៃគម្រូរបស់អ្នក ប្រើប្រាស់ការពិតថានៅថ្ងៃទី31 ខែ មិនា ព្រះអាទិត្យរះនៅម៉ោង5:15 AM ហើយកំណត់នៅម៉ោង6:18 PM នៅ New Orleans ។

26. អថេរផ្កាយមួយដែលមានពន្លឺឆ្លាស់គ្នាកើនឡើងហើយនឹងថយចុះ ។ ចំពោះផ្កាយដែលអាចមើលឃើញបំផុតគឺ Delta Cephei ពេលវេលាអំឡុងពេលនៃពន្លឺអតិបរមាឡគឺ 5.4 ថ្ងៃ ពន្លឺជាមធ្យមនៃផ្កាយគឺ 4.0 ហើយកម្រិតពន្លឺរបស់វា ± 0.35 រ៉ិចទ័រ ។ រកអនុគមន៍មួយដែលគម្រូពន្លឺនៃ Delta Cephei ជាអនុគមន៍នៃពេលវេលា ។

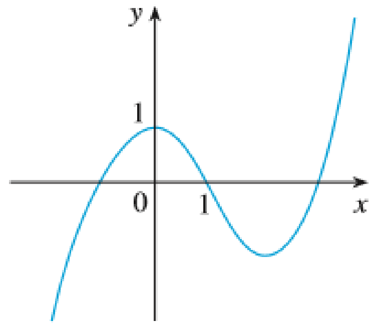
27.ក. តើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(|x|)$ មានទំនាក់ទំនងទៅនឹងក្រាបនៃ f យ៉ាងដូចម្តេច?

ខ. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin|x|$ ។

គ. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{|x|}$ ។

r28. ប្រើក្រាបដែលបានផ្តល់ឲ្យដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{f(x)}$ ។ តើលក្ខណៈពិសេសមួយដែលសំខាន់បំផុតក្នុការគូសក្រាបនៃអនុគមន៏ $y=\frac{1}{x}$? ចូរពន្យល់ពីវិធីដែលគេប្រើ

(រូបភាពទី12: ក្រាបអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$)



29-30. រក ក. $f+g$ ខ. $f-g$ គ. fg ឃ. $\frac{f}{g}$ ហើយនឹងដែនកំណត់របស់វា ។

29. $f(x)=x^3+2x^2, g(x)=3x^2-1$

30. $f(x)=\sqrt{3-x}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$

31-36. រកអនុគមន៍ ក. fog ខ. gof គ. $f0f$ ឃ. gog ហើយនឹងដែនកំណត់ ។

31. $f(x)=x^2-1, g(x)=2x+1$

32. $f(x)=x-2, g(x)=x^2+3x+4$

33. $f(x)=1-3x, g(x)=\cos x$

34. $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\sqrt[3]{1-x}$

35. $f(x)=x+\frac{1}{x}, g(x)=\frac{x+1}{x+2}$

36. $f(x)=\frac{x}{1+x}, g(x)=\sin 2x$

37-40. រកអនុគមន៍ $fogoh$

37. $f(x)=3x-2, g(x)=\sin x, h(x)=x^2$

38. $f(x)=|x-4|, g(x)=2^x, h(x)=\sqrt{x}$

39. $f(x)=\sqrt{x-3}, g(x)=x^2, h(x)=x^3+2$

40. $f(x)=\tan x, g(x)=\frac{x}{x-1}, h(x)=\sqrt[3]{x}$

41-46. រកកន្សោមអនុគមន៍ក្នុងទម្រង់ fog

41. $F(x)=(2x+x^2)^4$ 42. $F(x)=\cos^2 x$

43. $F(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ 44. $G(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}$

45. $v(t)=\sec(t^2)\tan(t^2)$ 46. $u(t)=\dfrac{\tan t}{1+\tan t}$

47-49. រកកន្សោមនៃអនុគមន៍ក្នុងទម្រង់ $fogoh$

47. $R(x)=\sqrt{\sqrt{x}-1}$ 48. $H(x)=\sqrt[4]{2+|x|}$

49. $H(x)=\sec^4\left(\sqrt{x}\right)$

50. ប្រើតារាងខាងក្រោមដើម្បីរកតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗ

ក. $f\left(g(1)\right)$ ខ. $g\left(f(1)\right)$ គ. $f\left(f(1)\right)$

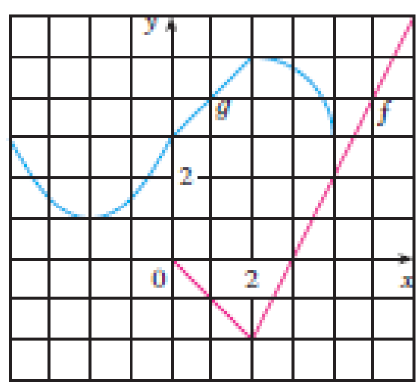
ឃ. $g\left(g(1)\right)$ ង. $(gof)(3)$ ច. $(fog)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51.ប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g ដែលគេឲ្យដើម្បីរកតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗ ឬក៏ពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជាវាមិនត្រូវវាបានកំណត់ ។

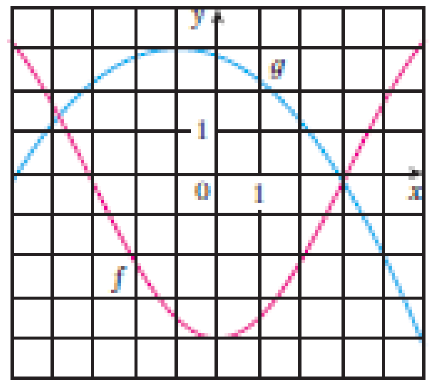
ក. $f\left(g(2)\right)$ ខ. $g\left(f(1)\right)$ គ. $f\left(f(1)\right)$

ឃ. $g\left(g(1)\right)$ ង. $(gof)(3)$ ច. $(fof)(4)$



(រូបភាពទី13: ក្រាបអនុគមន៍ f និង g)

52. ប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g ដែលគេឲ្យដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f(g(x))$ ចំពោះ $x=-5,-4,-3,\ldots,5$ ។ ប្រើការប៉ាន់ស្មានទាំងនេះដើម្បីគូសក្រាបនៃ fog ។



(រូបភាពទី13: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g)

53. ថ្មមួយដុំត្រូវបានទម្លាក់ចូលទៅក្នុងបឹងបង្កើយបានជារង្វង់មួយដែលធ្វើដំណើរនៃខាងក្រៅនៅល្បឿន $60cm/s$ ។

ក. រកកន្សោមកាំនៃរង្វង់នេះជាអនុគមន៍នៃពេលវេលាគិតជាវិនាទី ។

ខ. បើ A ជាផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ជាអនុគមន៍នៃកាំ ។ រក Aor ហើយបកស្រាយ ។

54. ប៉ោងប៉ោងស្វ៊ែមួយត្រូវបានគេបំប៉ោងហើយកាំនៃប៉ោងប៉ោងគឺកើនឡើងនៅអត្រាមួយនៃ $2cm/s$ ។

ក. រកកន្សោមនៃកាំប៉ោងប៉ោងជាអនុគមន៍នៃពេលវេលាគិតជាវិនាទី ។

ខ. បើ V ជាមាឌនៃប៉ោងប៉ោងជាអនុគមន៍នៃកាំ ។ រក Vor ហើយបកស្រាយ ។

55. នាវាមួយកំពុងផ្លាស់ទីក្នុងល្បឿន $30km/h$ ស្របទៅនឹងឆ្នេរសមុទ្រ ។ នាវាស្ថិតនៅចម្ងាយ $6km$ ពីឆ្នេរសមុទ្រហើយវាឆ្លងកាត់light-house នៅពេលរសៀល ។

ក. រកកន្សោមចម្ងាយ s ដែលស្ថិតនៅចន្លោះlight-house និងនាវាជាអនុគមន៍នៃ d ជាចម្ងាយដែលនាវាបានធ្វើដំណើរចាប់ពីពេលរសៀល ។ រក f ដែល $s=f(d)$ ។

ខ. រកកន្សោម d ជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល t ដែលជាពេលដែលនាវាធ្វើដំណើរចាប់ពីពេលរសៀល ។ រក g ដែល $d=g(t)$ ។

គ. រក fog ។ តើអនុគមន៍នេះតាងឲ្យអ្វី?

56. យន្តហោះមួយគ្រឿងកំពុងហោះក្នុងល្បឿន $350mi/h$ នៅរយៈទទឹងមួយ $1mile$ ហើយឆ្លងកាត់ស្ថានីយ៍រ៉ាដាដោយផ្ទាល់នៅខណៈពេល $t=0$ ។

ក. រកកន្សោមចម្ងាយ d គិតជា $mile$ ដែលយន្តហោះហោះបានជាអនុគមន៍នៃ t ។

ខ. រកកន្សោមចម្ងាយ s ដែលស្ថិតនៅចន្លោះរវាងយន្តហោះនិងស្ថានីយ៍រ៉ាដាជាអនុគមន៍នៃ d ។

គ. ប្រើប្រាស់អនុគមន៍បណ្តាក់ដើម្បីរកកន្សោម s ជាអនុគមន៍នៃ t ។

57. អនុគមន៍Heavisides H ត្រូវបានកំណត់ដោយ $H(t)=\begin{cases}0 & if\ t<0\\ 1 & if\ t\geq 0\end{cases}$

វាត្រូវបានប្រើក្នុងការសិក្សាពីសៀគ្វីអគ្គិសនីដើម្បីតាងការកើនឡើងភ្លាមៗនៃចរន្តអគ្គិសនី ឬក៏វ៉ុលនៅពេលយើងបើកកុងតាក់ភ្លាមៗ ។

ក. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ Heavisides ។

ខ. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $V(t)$ នៅក្នុងសៀគ្វីប្រសិនបើគេគេបើកកុងតាក់នៅពេល $t=0$ ហើយ $120V$ ត្រូវបានអនុវត្តន៍ភ្លាមៗទៅក្នុងសៀគ្វី ។ សរសេរអនុគមន៍ $V(t)$ នៅក្នុង $H(t)$ ។

គ. ចូរគូសក្រាននៃអនុគមន៍ $V(t)$ នៅក្នុងសៀគ្វីមួយ ប្រសិនប់គេបើកកុងតាក់នៅពេល $t=5s$ ហើយ $240V$ ត្រូវាបានអនុវត្តន៍តៅក្នុងសៀគ្វីភ្លាមៗ ។ សរសេរអនុគមន៍ $V(t)$ នៅក្នុង $H(t)$ ។ (សម្គាល់ ដែលចាបផ្តើមនៅពេល $t=5s$ ត្រូវគ្នាទៅនឹងការបម្លែងមួយ) ។

58. អនុគមន៍ Heavisides ត្រូវបានកំណត់នៅក្នុងលំហាត់ទី 57 អាចត្រូវបានគេប្រើដើម្បីកំ ណត់អនុគមន៍ ramp $y=ctH(t)$ ដែលតាងឲ្យការកើនឡើងបន្តិចម្តងៗក្នុងវ៉ុលម៉ែត ឬក៏ចរន្តនៅក្នុងសៀគ្វីមួយ ។

ក. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ ramp $y=tH(t)$ ។

ខ. ចូរគូសក្រាបនៃ $V(t)$ នៅក្នុងសៀគ្វីមួយប្រសិនបើគេបើកកុងតាក់នៅពេល $t=0$ ហើយវ៉ុលកើនឡើងបន្តិចម្តងៗលើស $120V$ ក្នុងចន្លោះពេល $60s$ ។ ចូរសរសេរកន្សោម $V(t)$ នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ $H(t)$ ចំពោះ $t\geq 32$ ។

59. តាង f និង g ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរជាមួយសមីការ $f(x)=m_1x+b_1$ ហើយ $g(x)=m_2x+b_2$ ។ តើអនុគមន៍ fog ក៏ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរដែរទេ ? ប្រសិនបើតើមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាបរបស់វាស្មើប៉ុន្មាន ?

60. ប្រសិនបើអ្នកវិនិយោគ x ដុល្លារនៅអត្រាការប្រាក់សមាស 4% ក្នុងមួយឆ្នាំ នោះចំនួនទឹកប្រាក់ $A(x)$ នៃការវិនិយោគបន្ទាប់ពីរយៈពេលមួយឆ្នាំគឺ $A(x)=1.04x$ ។ ចូររក $AoA, AoAoA$ និង $AoAoAoA$ ។ តើអនុគមន៍បណ្ដាក់ទាំងនេះតាងឲ្យអ្វី? រកកន្សោមមួយចំពោះអនុគមន៍បណ្ដាក់នៃ n ដូចទៅនឹង A ។

61. ក. បើគេមានអុគមន៍ $g(x)=2x+1$ និង $h(x)=4x^2+4x+7$ ។ រកអនុគមន៍ f មួយដែល $fog=h$ (គិតអំពីអ្វីដែលអ្នកត្រូវតែអនុវត្តទៅលើកន្សោមចំពោះ g ដើម្បីបញ្ចប់ជាមួយកន្សោមនៃ h ។

62. បើគេមានអនុគមន៍ $f(x)=x+4$ និង $h(x)=4x-1$ ។ រកអនុគមន៍ g ដែល $gof=h$ ។

63. ឧបមាថា g ជាអនុគមន៍គូរហើយតាង $h=fog$ ។ តើអនុគមន៍ h ជាអនុគមន៍គូរជានិច្ចទេ?

64. ឧបមាថា g ជាអនុគមន៍សេសហើយតាង $h=fog$ ។ តើអនុគមន៍ h ជាអនុគមន៍សេសជានិច្ចទេ? f ជាអនុគមន៍សេសទេ? f ជាអនុគមន៍គូរទេ?

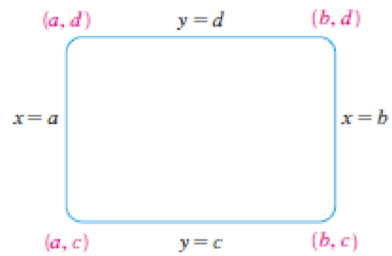
១.៤. ការគូសក្រាបដោយប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីន និងកុំព្យូទ័រ

នៅក្នុងចំណុចនេះយើងសន្មតថាអ្នកមានដំណើរការម៉ាស៊ីនគូសក្រាបនិងកុំព្យូទ័រជាមួយកម្មវិធីគូសក្រាប ។ យើងឃើញថាការប្រើឧបករណ៍ក្នុងការគូសក្រាបស្មុគស្មាញនឹងដោះស្រាយនូវបញ្ហាស្មុគស្មាញជាច្រើនជាងនឹងផ្សេងទៀតដែលអាចទៅរួច ។ យើងក៏មានចំណុចខាងក្រៅខ្លះដែលអាចកើតមានជាមួយម៉ាស៊ីនទាំងនេះ ។

ម៉ាស៊ីនគូសក្រាប និងកុំព្យូទ័រអាចផ្ដល់ឲ្យយើងនូវក្រាបនៃអនុគមន៍បានត្រឹមត្រូវណាស់ ។ ប៉ុន្តែយើងនឹងឃើញនៅក្នុងជំពូកទី 4 មិនត្រឹមតែឆ្លងកាត់ការគណនាប៉ុណ្ណោះទេអាចឲ្យយើងប្រាកដថាយើងអាចរកឃើញនូវរូបភាពនៃក្រាបដែលគួរចាប់អារម្មណ៍ទាំងអស់ ។

ម៉ាស៊ីនគូសក្រាបមួយ ឬក៏កុំព្យូទ័របង្ហាញនូវចំណែកនៃចតុកោណកែងមួយនៃក្រាបនៃអនុគមន៍នៅក្នុង Window បង្ហាញ ឬក៏លើកញ្ចក់សម្រាប់មើល ដែលយើងយោងទៅលើចតុកោណកែងសម្រាប់មើល ។ កញ្ចក់ដើមតែងតែផ្ដល់នូវភាពមិនពេញលេញ ឬក៏រូបភាពមិនច្បាស់ ដូចនេះវាសខាន់ណាស់ដើម្បីជ្រើសរើសចតុកោណកែងសម្រាប់មើលដោយមានការថៃទាំ ។ ប្រសិនបើយើងជ្រើសរើសតម្លៃ x ទៅរូបភាពពីតម្លៃអប្បបរមានៃ $X_{\min}=a$ ទៅតម្លៃអតិបរមានៃ $X_{\max}=b$ ហើយតម្លៃ y ទៅរូបភាពពីតម្លៃអប្បបរមាមួយនៃ $Y_{\min}=c$ ទៅតម្លៃអតិបរមានៃ $Y_{\max}=d$ នោះផ្នែកដែលអាចមើលឃើញនៃក្រាបនៅក្នុងចតុកោណកែងគឺ $[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/a\le x\le b, c\le y\le d\}$

បង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី1 ។ យើងយោងទៅលើចតុកោណកែងនេះគឺ $[a,b]$ ដោយ $[c,d]$ ចតុកោណកែងសម្រាប់មើល ។



(រូបភាពទី1: ចតុកោណកែង)

ម៉ាស៊ីនគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ f មួយ ។ វាគូសនូវចំណុចនៃទម្រង់ $(x, f(x))$ សម្រាប់ចំនួនប្រាកដមួយស្មើនឹងតម្លៃនៃ x ដែលស្ថិតនៅចន្លោះ a និង b ។ ប្រសិនបើតម្លៃ x មួយមិនស្ថិតនៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f ឬក៏ប្រសិនបើ $f(x)$ ស្ថិតនៅខាងក្រៅរូបចតុកោណកែងវានឹងផ្លាស់ទីទៅតម្លៃ x បន្ទាប់ ។ ម៉ាស៊ីនភ្ជាប់ទៅនឹងចំណុចនីមួយៗមុនចំណុចដែលបានគូសដើម្បីតាងទម្រង់មួយនៃក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍ទី1 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2+3$ ក្នុងបម្រាប់នីមួយៗនៃរូបចតុកោណកែង ។

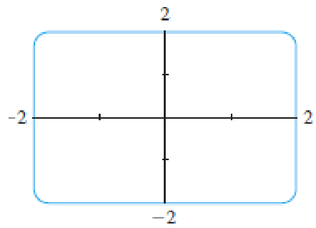
ក.$[-2,2]$ ដោយ $[-2,2]$ ខ.$[-4,4]$ ដោយ $[-4,4]$

គ.$[-10,10]$ ដោយ $[-5,30]$ ឃ.$[-50,50]$ ដោយ $[-100,1000]$

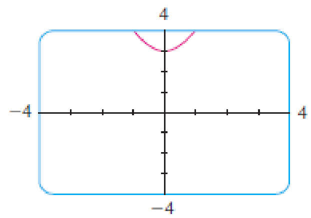
ដំណោះស្រាយ

ចំពោះផ្នែក (ក) យើងជ្រើសយករូបភាពដោយកំណត់យក $X_{max}=-2, X_{max}=2, Y_{min}=-2$ និង $Y_{max}=2$ ។ លទ្ធផលនៃក្រាបត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាព2(ក) ។ បង្ហាញនៅលើអេក្រង់ គឺទទេរ។ ការគិតពេលភ្លាមៗបានផ្តល់ដោយការពន្យល់ : សម្គាល់ថា $x^2\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ x ដូច្នេះ $x^2+3\ge 3$ ចំពោះគ្រប់ x ។ ដូចនេះ រូបភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2+3$ គឺ $[3,+\infty)$ ។ នេះមានន័យថាក្រាបនៃអនុគមន៍ f ស្ថិតនៅខាងក្រៅទាំងស្រុងនៃរូបភាពចតុកោណកែង $[-2,2]$ ដោយ $[-2,2]$ ។

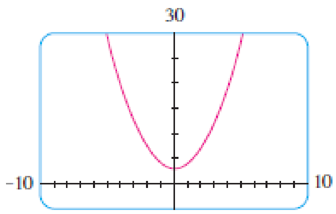
ក្រាបចំពោះរូបចតុកោណកែងក្នុងផ្នែក(ខ) (គ) និង (ឃ) គឺត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី2 ផងដែរ ។ សង្កេតថាយើងបានការបំពេញរូបភាពជាច្រើននៅក្នុងផ្នែក(គ) និង (ឃ) ប៉ុន្តែក្នុងចំណុច(ឃ) វាមិនច្បាស់ដែល $y_0=3$ ។



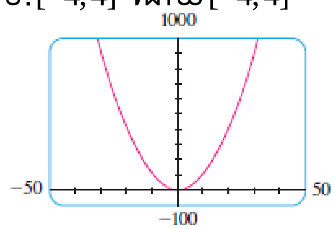
ក. $[-2,2]$ ដោយ $[-2,2]$



ខ. $[-4,4]$ ដោយ $[-4,4]$



គ. $[-10,10]$ ដោយ $[-5,30]$



ឃ. $[-50,50]$ ដោយ $[-100,1000]$

យើងមើលនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី1 ដែលជាជម្រើសនៃរូបភាពចតុកោណកែងអាចបង្កើតករកើតឡើងនៃក្រាបធំផ្សេងគ្នា ។ ជាញឹកញាប់វាសំខាន់ដើម្បីផ្លាស់ប្តូរពីរូបចតុកោណកែងធំមួយដើម្បីទទួលរូបភាពពេញមួយផ្សេងទៀត រូបភាពទូទៅមួយផ្សេងទៀតនៃក្រាប ។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់យើងឃើញថាចំណេះដឹងនៃដែនកំណត់និងរូបភាពនៃអនុគមន៍មួយពេលខ្លះផ្តល់ឲ្យយើងនូវព័ត៌មានគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីជ្រើសយកនូវរូបភាពចតុកោណកែងបានល្អមួយ ។

ឧទាហរណ៍ទី 2 : ចូរកំណត់រូបចតុកោណមួយសមស្របចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{8-2x^2}$ ហើយប្រើវាដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគម៌ f ។

ដំណោះស្រាយ

កន្សោមចំពោះអនុគមន៍ f ត្រូវបានកំណត់នៅពេលដែល

$$8-2x^2\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2\le 8 \Leftrightarrow x^2\le 4$$

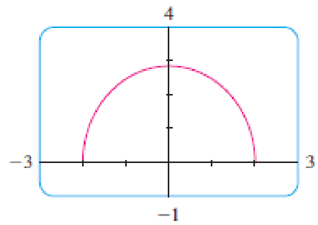
$$\Leftrightarrow |x|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺនៅចន្លោះ $[-2,2]$

$$0\le\sqrt{8-2x^2}\le\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2.83$$

ដូចនេះរូបភាពនៃ f ស្ថិតនៅចន្លោះ $\left[0,2\sqrt{2}\right]$ ។

យើងជ្រើសរើសរូបចតុកោណកែងដែលចន្លោះ x តិចជាងដែនកំណត់ហើយចន្លោះ y ធំជាងរូបភាព ។ ការយករូបភាពចតុកោណកែងជា $[-3,3]$ ដោយ $[-1,4]$ យើងបានក្រាបដែលបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី3 ។



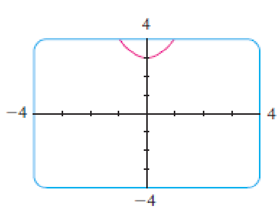
(រូបភាពទី3)

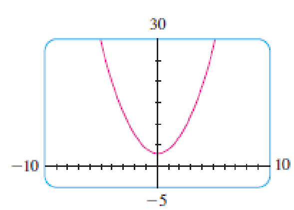
ឧទាហរណ៍ទី3 : ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^3 - 50x$ ។

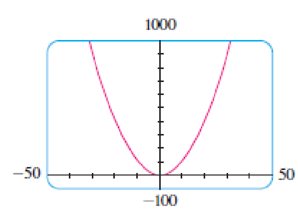
ដំណោះស្រាយ

នេះជាដែនកំណត់គឺ □ ដែលកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត ។ នេះមិនមែនជាជំនួយដល់យើងក្នុងការជ្រើសរើសរូបភាពចតុកោណកែងមួយ ដោយធ្វើការសាកល្បង ។ ប្រសិនបើយើងចាប់ផ្តើមជាមួយរូបចតុកោណកែង $[-5,5]$ ដោយ $[-5,5]$ យើងបានក្រាបនៅក្នុងរូបភាពទី4 ។ វាកើតឡើងនៅចន្លោះទទេ ប៉ុន្តែក្រាបពិតប្រាកដគឺនៅជិតបន្ទាត់ឈរដែលវាបញ្ចូលគ្នាជាមួយអ័ក្ស y ។

ប្រសិនបើយើងប្តូររូបភាពចតុកោណកែងទៅជា $[-20,20]$ ដោយ $[-20,20]$ យើងបានរូបភាពដែលបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី5(ក) ។ ក្រាបដែលកើតឡើងស្របនឹងបន្ទាត់ឈរ ប៉ុន្តែយើងដឹងថាមិនអាចត្រឹមត្រូវ ។ ប្រសិនបើយើងមើលដោយប្រុងប្រយ័ត្ននៅពេលកំពុងគូសក្រាបយើងឃើញថាក្រាបចេញពីអេក្រង់ហើយកើតឡើងវិញអំឡុងពេលដំណើរការគូសក្រាប ។ នេះបង្ហាញថាយើងត្រូវការមើលច្រើនទៅលើទីតាំងនៃបន្ទាត់ឈរ ដូច្នេះយើងអាចប្តូររូបចតុកោណកែងទៅ $[-20,20]$ ដោយ $[-500,500]$ ។ លទ្ធផលក្រាបត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាំពទី5(ខ) ។ (រូបភាពទី5)







(ក) (ខ) (គ)

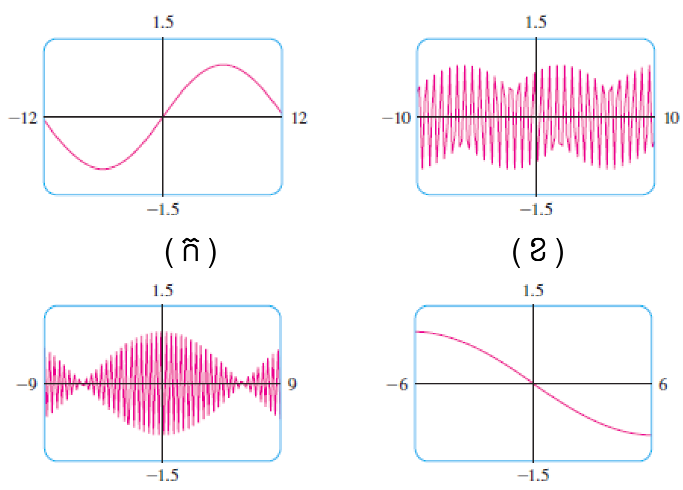
វានៅតែបង្ហាញមិនបានល្អគ្រប់រូបភាពសំខាន់ៗនៃអនុគមន៍ទាំងអស់បានទេ ដូច្នេះយើត្រូវព្យាយាម $[-20,20]$ ដោយ $[-1000,1000]$ នៅក្នុងរូបភាពទី5(គ) ។ ឥឡូវយើងយើងជឿជាក់ច្រើនថាយើងត្រូវតែបានរូបចតុកោណកែងមួយដែលសមស្រប ។ ក្នុងជំពូកទី4 យើងនឹងអាចឃើញក្រាបដែលបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី5(គ)បង្ហាញពិតគ្រប់រូបភាពគ្រប់រូបភាពសំខាន់ៗនៃអនុគមន៍ ។

ឧទាហរណ៍ទី4 : ក្រាបអនុគមន៍ $f(x)=\sin 50x$ នៅក្នុងរូបចតុកោណសមស្របមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

រូបភាពទី6 (ក) បង្ហាញក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដែលបង្កើតដោយឧបករណ៍គូសក្រាបប្រើរូបចតុកោណកែង $[-12,12]$ ដោយ $[-1.5,1.5]$ ។ ដំបូងមើលក្រាបកើតឡើងដោយសមហេតុផល ។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងផ្លាស់ប្តូររូបចតុកោណកែងក្នុងបម្រាប់នៃរូបភាពទី6 ក្រាបមើលទៅមានលក្ខណៈផ្សេងគ្នាណាស់ ។ អ្វីដែលកំពុងកើតឡើងគឺចម្លែក ។

(រូបភាពទី6)



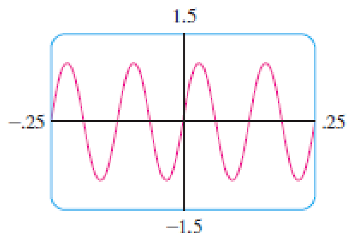
(ក) (ខ) (គ) (ឃ)

ដើម្បីពន្យល់ពីការកើតឡើងផ្សេងគ្នានៃក្រាបទាំងនេះហើយដើម្បីស្វែងរករូបចតុកោណកែងសមស្របមួយ យើងត្រូវការរកខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin 50x$ ។ យើងដឹងថាអនុគមន៍ $y=\sin 50x$ មានខួបស្មើ 2π ហើយក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin 50x$ គឺរួញនៅលើអ័ក្សដេកមួយឯកតាគឺ 50 ដូច្នេះខួបនៃ $y=\sin 50x$ គឺ

$$\frac{2\pi}{50}=\frac{\pi}{25}\approx 0.126$$

សំណើរនេះដែលយើងត្រូវតែដោះស្រាយជាមួយនឹងតម្លៃនៃ x តែប៉ុណ្ណោះដើម្បីបង្ហាញលំយោលពីរបីនៃក្រាប ។ ប្រសិនបើយើងជ្រើសរើសរូបចតុកោណកែង $[-0.25, 0.25]$ ដោយ $[-1.5, 1.5]$ យើងបានក្រាបបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី7 ។

ឥឡូវនេះយើងអ្វីដែលជាកំហុសយើងមើលឃើញនៅក្នុងរូបភាពទី6 ។ លំយោងនៃអនុគមន៍ $y = \sin 50x$ គឺដូចជាលឿននៅពេលដែលការគណនាចំណុចគូសនិងបញ្ចូលវា វាបាត់ភាគច្រើននៃចំណុចអតិបរមា និងអប្បបរមាហើយដូចនេះផ្តល់ឲ្យនូវការយល់ច្រឡំទៅលើក្រាប ។



(រូបភាពទី7)

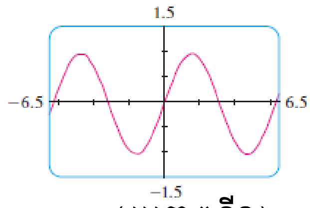
យើងឃើញហើយថាការប្រើនូវរូបចតុកោណសមស្របមួយអាចផ្តល់នូវការភាន់ច្រឡំក្រាបនៃអនុគមន៍ ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ទី1 និងទី3 យើងបានដោះស្រាយដោយផ្លាស់ប្តូររូបចតុកោណកែងដែលធំ ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ទី4 យើងបង្កើតរូបចតុកោណកែងតូចជាង ។ ក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់យើងមើលនូវអនុគមន៍មួយដែលគ្មានរូបចតុកោណកែងមួយដែលបង្ហាញពីការគូសក្រាបពិត

ឧទាហរណ៍ទី5 : ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sin x + \frac{1}{100}\cos 100x$ ។

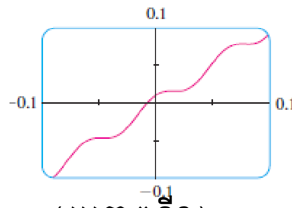
ដំណោះស្រាយ

រូបភាពទី8 បង្ហាញក្រាបនៃអនុគមន៍ f បានបង្កើតដោយម៉ាស៊ីនគូសក្រាប និងរូបភាពចតុកោណកែង $[-6.5, 6.5]$ ដោយ $[-1.5, 1.5]$ ។ វាមើលទៅភាគច្រើនដូចទៅនឹងក្រាបនៃ $y = \sin x$ ប៉ុន្តែប្រហែលជាមានរលាក់ជាប់គ្នាខ្លះ ។ ប្រសិនបើយើងពង្រីកនៅក្នុងរូបចតុកោណកែង $[-0.1, 0.1]$ ដោយ $[-0.1, 0.1]$ យើងអាចឃើញរូបរាងនៃការរលាក់យ៉ាងច្បាស់ជាច្រើនក្នុងរូបភាពទី9 អំណះអំណាងចំពោះលក្ខណៈនេះគឺថាលក្ខខណ្ឌទី2 $\frac{1}{100}\cos 100x$ គឺតូចណាស់បើប្រៀបធៀបទៅនឹងលក្ខណ្ឌទី1 គឺ $\sin x$ ។

ដូចនេះយើងត្រូវការក្រាបពីរលក្ខណៈពិតនៃអនុគមន៍ ។



(រូបភាពទី8)

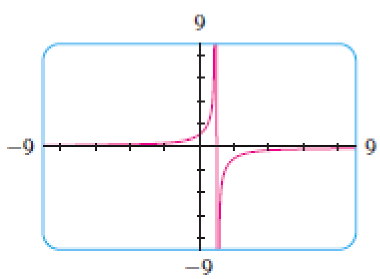


(រូបភាពទី9)

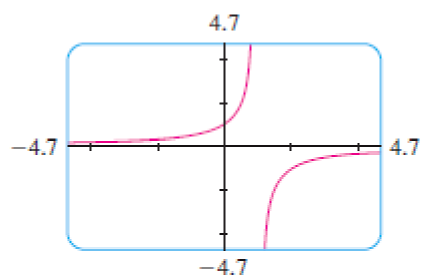
ឧទាហរណ៍ទី6 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{1}{1-x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រូបភាពទី10(ក) បង្ហាញក្រាបដែលបង្កើតដោយម៉ាស៊ីនគូសក្រាប និងរូបចតុកោណកែង $[-9,9]$ ដោយ $[-9,9]$ ។ ក្នុងការភ្ជាប់ចំណុចបន្តបន្ទាប់នៅលើក្រាប ការគណនាបានបង្កើតខ្សែកោងចុះពីផ្នែកខាងលើដល់ខាងក្រោមនៃកញ្ចក់ ។ ដែលខ្សែកោងមិនមែនជាផ្នែកពិតនៃក្រាប ។ សម្គាល់ថា ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{1}{1-x}$ គឺ $\{x/x\neq 1\}$ ។ យើងអាចបំបាត់អថេរនៅជិតអាស៊ីមតូតឈរដោយសាកប្តូរមាត្រដ្ឋាន ។ នៅពេលយើងផ្លាស់ប្តូរទៅជារូបចតុកោណកែងតូច $[-4.7,4.7]$ ដោយ $[-4.7,4.7]$ នៅលើការគណនាពិសេសនេះ យើងបានក្រាបដែលល្អភាគច្រើននៅក្នុងរូបភាពទី10(ខ) ។



រូបភាពទី10(ក)



រូបភាពទី10(ខ)

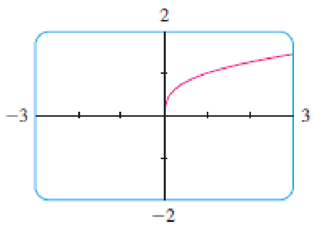
ឧទាហរណ៍ទី7 : ក្រាបអនុគមន៍ $y=\sqrt[3]{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

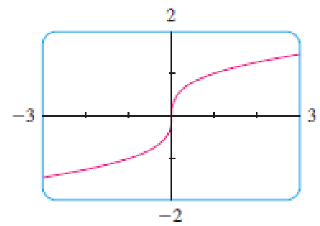
ឧបករណ៍ដាក់បង្ហាញក្រាបខ្លះដូចជាក្រាបដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី11 ។ ចំណែកឯការបង្កើតក្រាបផ្សេងទៀតក្នុងរូបភាពទី12 ។ យើងដឹងពីចំណុច1.2 (រូបភាពទី13)ដែលក្រាបក្នុងរូបភាពទី12គឺត្រឹម

ត្រូវ ដូចនេះតើមានអ្វីកើតឡើងនៅក្នុងរូបភាពទី11? ការពន្យល់គឺថាម៉ាស៊ីនខ្លះដោយគណនាស្វ័យគុណគូបនៃ x

ដោយប្រើឡូការីតដែលមិនត្រូវបានកំណត់ប្រសិនបើ x អវិជ្ជមាន ដូចនេះក្រាបដែលបានបង្កើតឡើងគឺត្រឹមត្រូវតែពាក់កណ្តាលតែប៉ុណ្ណោះ ។



(រូបភាពទី11)



(រូបភាពទី12)

អ្នកគួរតែសាកល្បងជាមួយម៉ាស៊ីនផ្ទាល់ខ្លួនរបស់អ្នកដើម្បីមើលក្រាបបណាមួយនៃក្រាបទាំងពីរនេះត្រូវបានបង្កើតឡើង ។ ប្រសិនបើអ្នកបានក្រាបនៅក្នុងរូបភាពទី11 ។ អ្នកអាចទទួលបានរូបភាពត្រឹមត្រូវដោយការគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{|x|}\cdot|x|^{\frac{1}{3}}$

សម្គាល់ថាអនុគមន៍នេះគឺស្មើនឹង $\sqrt[3]{x}$ (លើកលែងនៅពេល $x=0$) ។

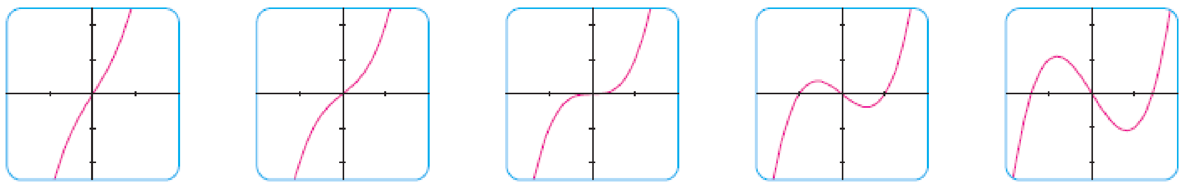
ដើម្បីយល់ពីរបៀបរកកន្សោមចំពោះអនុគមន៍ដែលទាក់ទងទៅនឹងក្រាបរបស់វា ។ វាជួយដើម្បីបានក្រាបគ្រួសារអនុគមន៍មួយដែលប្រមូលអនុគមន៍ដែលមានសមីការទាក់ទងគ្នា ។ ក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់យើងមានក្រាបសមាជិកនៃគ្រួសារអនុគមន៍សនិទានដឺក្រេទី3 ។

ឧទាហរណ៍ទី8 : ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^3+cx$ ចំពោះតម្លៃផ្សេងគ្នានៃចំនួន c ។ តើក្រាបត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរយ៉ាងដូចម្តេចនៅពេលដែលតម្លៃ c ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរ?

ដំណោះស្រាយ

រូបភាពទី13 បានបង្ហាញពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^3+cx$ ចំពោះ c មានតម្លៃ $c=2,1,0,-1$ និង -2 ។ យើងឃើញថាចំពោះតម្លៃវិជ្ជមាននៃ c ក្រាបកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំដោយគ្មានចំណុចអតិបរមា ឬចំណុចអប្បបរមា(ផត ឬប៉ោង) ។ នៅពេល $c=0$ វាបត់នៅត្រង់គល់ ។ នៅពេល c អវិជ្ជមានខ្សែកោងមានចំណុចអតិបរមាមួយ និងចំណុចអប្បបរមាមួយ ។ ពេល c ថយចុះចំណុចអតិបរមាឡើងខ្ពស់ហើយចំណុចអប្បបរមាចុះក្រោម ។

(រូបភាពទី13)

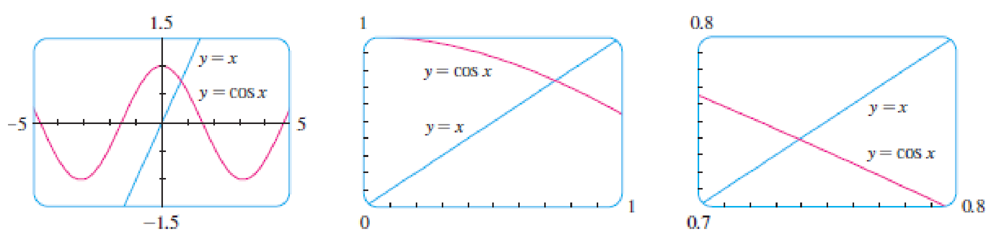


ក. $y = x^3 + 2x$ ខ. $y = x^3 + x$ គ. $y = x^3$ ឃ. $y = x^3 - x$ ង. $y = x^3 - 2x$

ឧទាហរណ៍ទី9 : ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = x$ ឲ្យបានត្រឹមត្រូវនូវតម្លៃទសភាគពីរ ។

ដំណោះស្រាយ

ការដោះស្រាយសមីការ $\cos x = x$ គឺ x ជាចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង $y = \cos x$ និង $y = x$ ។ ពីក្នុងរូបភាពទី14(ក)យើងឃើញថាមានដំណោះស្រាយតែមួយគត់ហើយវាស្ថិតនៅចន្លោះ 0 និង 1 ។ ការពង្រីកនៅក្នុងរូបភាពចតុកោណកែង $[0,1]$ ដោយ $[0,1]$ យើងឃើញពីរូបភាពទី14(ខ)ដែលស្វ័យគុណស្ថិតនៅចន្លោះ 0.7 និង 0.8 ។ ដូចនេះយើងពង្រីកបន្ថែមទៅក្នុងរូបភាពចតុកោណ $[0.7,0.8]$ ដោយ $[0.7,0.8]$ ក្នុងរូបភាពទី14(គ) ។ ដោយផ្លាស់ទីcursor ទៅចំណុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងពីរដោយពិនិត្យហើយពិតដែល x មានមាត្រដ្ឋាន 0.01 យើងឃើញថាដំណោះស្រាយនៃសមីការគឺប្រហែល 0.74 ។



ក. $[-5,5]$ ដោយ $[-1.5,1.5]$ ខ. $[0,1]$ ដោយ $[0,1]$ គ. $[0.7,0.8]$ ដោយ $[0.7,0.8]$

លំហាត់

1.ប្រើម៉ាស៊ីនគូសក្រាបឬក៏កុំព្យូទ័រដើម្បីកំណត់នូវរូបភាពចតុកោណកែងដើម្បីបង្កើតក្រាបដែលសមស្របបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$ ។

ក. $[-5,5]$ ដោយ $[-5,5]$ ខ. $[0,10]$ ដោយ $[0,2]$ គ. $[0,10]$ ដោយ $[0,10]$

2.ប្រើម៉ាស៊ីនគូសក្រាបឬក៏កុំព្យូទ័រដើម្បីកំណត់នូវរូបភាពចតុកោណកែងដើម្បីបង្កើតក្រាបដែលសមស្រប បំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^4-16x^2+20$

ក.$[-3,3]$ ដោយ $[-3,3]$ ខ.$[-10,10]$ ដោយ $[-10,10]$ គ.$[-50,50]$ ដោយ $[-50,50]$

ឃ.$[-5,5]$ ដោយ $[-50,50]$

3-14.កំណត់រូបភាពចតុកោណកែងសមស្របមួយចំពោះអនុគមន៍ដែលបានផ្តល់ឲ្យហើយប្រើវាដើម្បីគូស ក្រាប ។

3. $f(x)=x^2-36x+32$ 4. $f(x)=x^3+15x^2+65x$

5. $f(x)=\sqrt{50-0.2x}$ 6. $f(x)=\sqrt{15x-x^2}$

7. $f(x)=x^3-225x$ 8. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+100}$

9. $f(x)=\sin^2(1000x)$ 10. $f(x)=\cos(0.001x)$

11. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 12. $f(x)=\sec(20\pi x)$

13. $y=10\sin x+\sin 100x$ 14. $y=x^2+0.2\sin 50x$

15.ក. រករូបភាពចតុកោណកែងមួយចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=(x-10)^3 2^{-x}$ ។

ខ. តើអ្នកត្រូវការwindowច្រើនជាងមួយទេ ?ហេតុអ្វី ?

16.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2\sqrt{30-x}$ ក្នុងរូបភាពចតុកោណកែងសមស្របមួយ ។ ហេតុអ្វីបានជាផ្នែក នៃក្រាបដែលកើតឡើងត្រូវបានខកខាន ?

17.ក្រាបនៃអេលីប $4x^2+2y^2=1$ ដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលក្រាបខ្ពស់ជាងនឹងទាបជាងពាក់កណ្តាល នៃអេលីប ។

18.ក្រាបនៃអ៊ីពែបូល $y^2-9x^2=1$ ដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ ដែលក្រាបគឺខ្ពស់ជាង និងទាបជាងបែកជាង នៃអ៊ីពែបូល ។

19-20. តើក្រាបប្រសព្វគ្នាក្នុងរូបភាពចតុកោណកែងដែលឲ្យឬទេ ? ប្រសិនបើវាប្រសព្វតើមានចំណុចប្រសព្វប៉ុន្មាននៅក្នុងនោះ ?

19. $y=3x^2-6x+1, y=0.23x-2.25;[-1,3]$ ដោយ $[-2.5,1.5]$

20. $y=6-4x-x^2, y=3x+18;[-6,2]$ ដោយ $[-5,20]$

21-23. ដោះស្រាយសមីការឲ្យបានចម្លើយជាទសភាគពីរខ្ទង់

21. $x^4-x=1$ 22. $\sqrt{x}=x^3-1$ 23. $\tan x=\sqrt{1-x^2}$

24.យើងឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី9 ថាសមីការ $\cos x=x$ មានដំណោះស្រាយពិតប្រាកដតែមួយ ។

ក.ប្រើក្រាបដើម្បីបង្ហាញថាសមីការ $\cos x=0.3x$ មានដំណោះស្រាយបីហើយរកតម្លៃវាជាទសភាគពីរខ្ទង់ ។

ខ.រកតម្លៃប្រហែលមួយនៃ m ដែលថាសមីការ $\cos x=mx$ មានដំណោះស្រាយពិតប្រាកដពីរ ។

25.ប្រើក្រាបដើម្បីកំណត់អនុគមន៍ណាមួយ $f(x)=10x^2$ និង $g(x)=\frac{x^3}{10}$ គឺបំផុតជាងបំផុត(ដែលថាធំជាងនៅពេលដែល x ធំ) ។

26.ប្រើក្រាបដើម្បីកំណត់អនុគមន៍ណាមួយ $f(x)=x^4-100x^2$ និង $g(x)=x^3$ គឺបំផុតជាងបំផុត ។

27.តើតម្លៃ x ស្មើប៉ុន្មានដែលពិតថា $|\tan x-x|<0.01$ ហើយ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$?

28.ក្រាបនៃអនុគមន៍ពហុធា $P(x)=3x^5-5x^3+2x$ ហើយ $Q(x)=3x^5$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-2,2]$ ដោយ $[-2,2]$ ហើយបន្ទាប់មកផ្លាស់ប្តូរទៅជា $[-10,10]$ ដោយ $[-10000,10000]$ ។ តើអ្នកសង្កេតឃើញអ្វីពីក្រាបទាំងនេះ ?

29.ក្នុងលំហាត់នេះយើងគិតទៅលើគ្រួសារនៃអនុគមន៍ស្វ័យគុណ $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ក.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ និង $y=\sqrt[6]{x}$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-1,4]$ ដោយ $[-1,3]$ ។

ខ.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x$, $y=\sqrt[3]{x}$ និង $y=\sqrt[5]{x}$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-3,3]$ ដោយ $[-2,2]$ ។ (មើលឧទាហរណ៍ទី7)

គ.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$ និង $y=\sqrt[5]{x}$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-1,3]$ ដោយ $[-1,2]$ ។

ឃ.តើអ្នកអាចបង្កើតការសន្និដ្ឋានដូចម្តេចពីក្រាបទាំងនេះ ?

30.ក្នុងលំហាត់នេះយើងគិតពីគ្រួសារនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x^n}$ នៅពេល x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ក.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^3}$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-3,3]$ ដោយ $[-3,3]$ ។

ខ.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^4}$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែងដូចក្នុងផ្នែក (ក) ។

គ.ក្រាបទាំងអស់នៃអនុគមន៍ក្នុងផ្នែក(ក) និង (ខ) នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ដំបូងប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-1,3]$ ដោយ $[-1,3]$ ។

ឃ.តើអ្នកអាចបង្កើតការសន្និដ្ឋានដូចម្តេចពីក្រាបទាំងនេះ ?

31.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^4+cx^2+x$ ចំពោះតម្លៃគ្រប់តម្លៃ c ។ តើក្រាបផ្លាស់ប្តូររូបរាងដូចម្តេចនៅពេលតម្លៃ c ប្រែប្រួល ?

32.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{1+cx^2}$ ចំពោះតម្លៃផ្សេងគ្នានៃ c ។ ចូរពណ៌នាថាការប្រែប្រួលតម្លៃនៃ c តើជះឥទ្ធិពលដូចម្តេចដល់ក្រាប ។

33.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^n 2^{-x}, x\geq 0$, ចំពោះ $n=1,2,3,4,5,6$ ។ តើក្រាបប្រែប្រួលដូចម្តេចនៅពេល n កើនឡើង ?

34.ខ្សែកោងសមីការ $y=\frac{|x|}{\sqrt{c-x^2}}$ ត្រូវបានហៅថា bullet-nose curve ។ ក្រាបខ្លះនៃខ្សែកោងដើម្បីឃើញពីមូលហេតុ តើមានអ្វីកើតឡើងនៅពេល c កើនឡើង ?

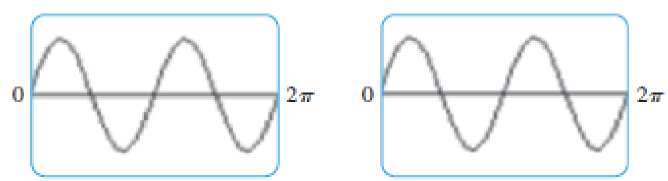
35.តើមានអ្វីកើតឡើងចំពោះក្រាបនៃសមីការ $y^2=cx^3+x^2$ ពេល c មានតម្លៃផ្សេងគ្នា ?

36.លំហាត់នេះរកនូវប្រសិទ្ធិភាពនៃអនុគមន៍ខាងក្នុង g នៅលើជាតុផ្សំមួយនៃអនុគមន៍ $y=f(g(x))$ ។

ក.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\left(\sqrt{x}\right)$ ប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[0,400]$ ដោយ $[-1.5,1.5]$ ។ តើក្រាបនេះខុសគ្នាពីក្រាបនៃអនុគមន៍ sin ដូចម្តេច ?

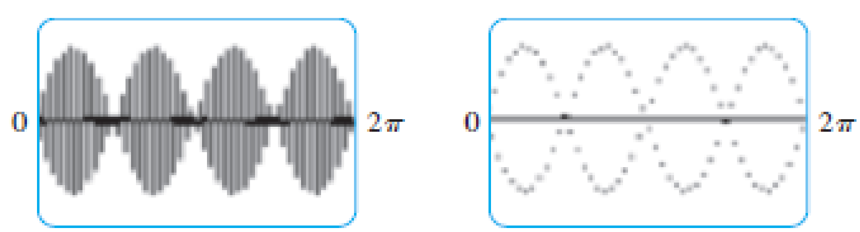
ខ.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\left(x^2\right)$ ប្រើរូបភាពចតុកោណកែង $[-5,5]$ ដោយ $[-1.5,1.5]$ ។ តើក្រាបនេះខុសគ្នាពីក្រាបនៃអនុគមន៍ sin ដូចម្តេច ?

37.រូបភាពបង្ហាញក្រាបនៃ $y=\sin 96x$ ហើយ $y=\sin 2x$ ត្រូវបានបង្ហាញដោយម៉ាស៊ីនគូសក្រាប $Ti-83$ មួយ ។ ក្រាបដំបូងគឺមិនត្រឹមត្រូវ ។ ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីក្រាបទាំងពីរកើតឡើងដូចគ្នា ។



$y=\sin 96x$ $y=\sin 2x$

38.ក្រាបទីមួយនៅក្នុងរូបភាពនៃ $y=\sin 45x$ ត្រូវបានបង្ហាញដោយម៉ាស៊ីនគូសក្រាប $Ti-83$ មួយ ។ វាគឺមិនត្រឹមត្រូវហើយដូច្នេះដើម្បីជាជំនួយក្នុងការពន្យល់ពីការកើតឡើងរបស់វា យើងគូសខ្សែកោងឡើងវិញចំណុចគម្រូក្នុងក្រាបទីពីរ ។ តើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ sin ពីរអ្វីដែលកើតឡើងដោយការគូស ? បង្ហាញថាចំណុចនីមួយៗនៅលើក្រាបនៃ $y=\sin 45x$ ថា $Ti-83$ ជ្រើសរើសដើម្បីគូសគឺពិតនៅលើខ្សែកោងមួយក្នុងចំណោមខ្សែកោងទាំងពីរនេះ ។



១.៥. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

អនុគមន៍ $f(x)=2^x$ ត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលព្រោះតម្លៃ x គឺជានិទស្សន្ត។ វាមិនត្រូវបានច្រឡំជាមួយនឹងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ $g(x)=x^2$ ទេ ដែលក្នុងនោះតម្លៃគឺអាស្រ័យ ។

ជាទូទៅអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគឺជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់ $f(x)=a^x$ ដែលជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ តាងហៅឡើងវិញអ្វីក្នុងន័យនេះ ។

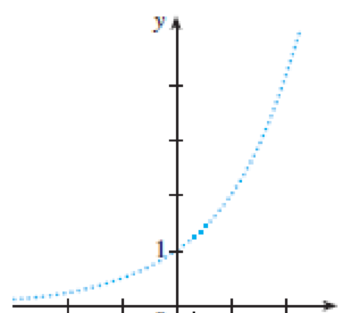
បើ $x=n, a$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{n}$

បើ $x=0$ នោះ $a^0=1$ ហើយបើ $x=-n$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

បើ x ជាចំនួនសនិទាន $x=\dfrac{p}{q}$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់ហើយ $q>0$ នោះ $a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

ក៏ប៉ុន្តែអ្វីជាអត្ថន័យនៃ a^x បើ x ជាចំនួនអសនិទាន? ជាឧទាហរណ៍ តើមានអត្ថន័យអ្វីដោយ $2^{\sqrt{3}}$ ឬក៏ 5^{π} ?

ដើម្បីជាជំនួយដល់យើងក្នុងការឆ្លើយសំណួរនេះដំបូងយើងមើលទៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2^x$ ដែល x ជាចំនួនសនិទាន ។ ការតាងនៃក្រាបនេះត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី1 យើងចង់ពង្រីកដែនកំណត់នៃ $y=2^x$ រួមបញ្ចូលទាំងចំនួនសនិទាន និងអសនិទាន ។



(រូបភាពទី1)

មានចន្លោះនៅក្នុងក្រាបក្នុងរូបភាពទី1 តម្លៃអសនិទានត្រូវគ្នានៃ x ។ យើងចង់បំពេញដើម្បីបំពេញក្នុងចន្លោះដោយកំណត់ $f(x)=2^x$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ f គឺជាអនុគមន៍កើន ។

ជាពិសេសចាប់ពីចំនួនអសនិទាន $\sqrt{3}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $1.7<\sqrt{3}<1.8$ យើងគួរតែមាន $2^{1.7}<2^{\sqrt{3}}<2^{1.8}$ ហើយយើងដឹងថាអ្វី $2^{1.7}$ នឹង $2^{1.8}$ មានន័យព្រោះ 1.7 នឹង 1.8 ជាចំនួនសនិទានដូចគ្នា ប្រសិនបើយើងប្រើតម្លៃប្រហែលល្អជាង $\sqrt{3}$ យើងទទួលបានតម្លៃប្រហែលល្អជាងចំពោះ $2^{\sqrt{3}}$;

$$1.73<\sqrt{3}<1.74 \Rightarrow 2^{1.73}<2^{\sqrt{3}}<2^{1.74}$$

$$1.732<\sqrt{3}<1.733 \Rightarrow 2^{1.732}<2^{\sqrt{3}}<2^{1.733}$$

$$1.7320<\sqrt{3}<1.7321 \Rightarrow 2^{1.7320}<2^{\sqrt{3}}<2^{1.7321}$$

$$1.73205<\sqrt{3}<1.73206 \Rightarrow 2^{1.73205}<2^{\sqrt{3}}<2^{1.73206}$$

វាអាចត្រូវវាបានបង្ហាញថាមានចំនួនពិតប្រាកដមួយថាគឺអស្ចារ្យជាងគ្រប់ចំនួនទាំងអស់

$$2^{1.7}, 2^{1.73}, 2^{1732}, 2^{1.7320}, 2^{1.73205}, \ldots$$

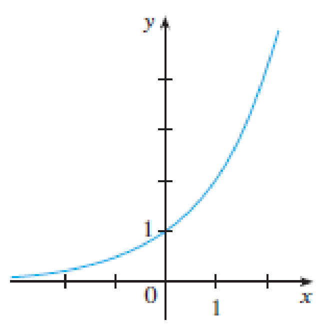
ហើយតិចជាងគ្រប់ចំនួនទាំងអស់

$$2^{1.8}, 2^{1.74}, 2^{1.733}, 2^{1.7321}, 2^{1.73206}, \ldots$$

យើងកំណត់ $2^{\sqrt{3}}$ ទៅជាចំនួននេះប្រើតម្លៃប្រហែលពីមុនយើងអាចគណនាវាបានត្រឹមត្រូវទៅជាចំនួនទសភាគ6ខ្ទង់

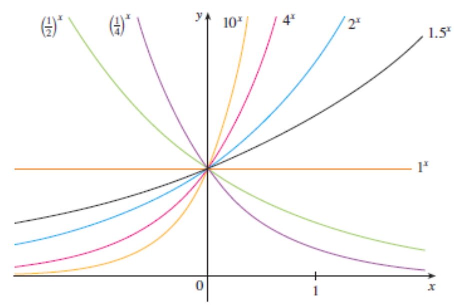
$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

ដូចគ្នាយើងអាចកំណត់ 2^x (ឬក៏ a^x បើ $a>0$) ដែលជាចំនួនអសនិទាន ។ រូបភាពទី2បង្ហាញពីវិធីក្នុងការបំពេញគ្រប់ចន្លោះទាំងអស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=2^x, x\in\mathbb{R}$ ។



(រូបភាពទី2)

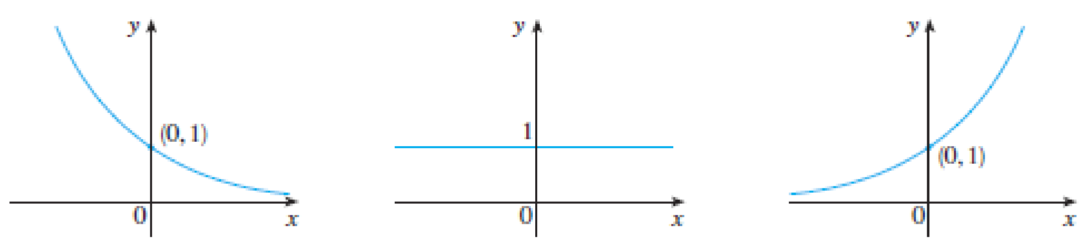
ក្រាបនៃសមាជិកគ្រួសារនៃអនុគមន៍ $y=a^x$ ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី3ចំពោះតម្លៃផ្សេងគ្នានៃ a ។ សម្គាល់ថាគ្រប់ក្រាបទាំងនេះកាត់តាមចំណុច $(0,1)$ ដូចគ្នាព្រោះ $a^0=1$ ចំពោះ $a\neq 0$ ។ សម្គាល់ថាតម្លៃអាស្រ័យ a ធំជាងផងដែរ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកើនឡើងយ៉ាងរហ័ស(ចំពោះ $x>0$) ។



(រូបភាពទី3)

អ្នកអាចមើលរូបភាពទី3ដែលមានមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$ ។ បើ $0<a<1$ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចុះបើ $a=1$ វាជាចំនួនថេរមួយហើយបើ $a>1$ វាកើនឡើង ។ មានបីករណីដែលត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី4 ។ សង្កេតថាបើ $a\neq 1$ នោះអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$ មានដែលកំណត់□ ហើយរូបភាព $(0,+\infty)$ ។ សម្គាល់ផងដែរថាពី $\left(\frac{1}{a}\right)^x=\frac{1}{a^x}=a^{-x}$ ក្រាបនៃ $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ គឺឆ្លុះទៅនឹង $y=a^x$ ធៀបនឹងអ័ក្ស y ។

(រូបភាពទី4)



ក. $y=a^x, 0<a<1$ ខ. $y=1^x$ គ. $y=a^x, a>1$

ហេតុផលមួយសំខាន់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលស្ថិតក្នុងបម្រាប់ ។ ប្រសិនបើ x និង y ជាចំនួនសនិទាននោះច្បាប់ទាំងនេះត្រូវបានស្គាល់យ៉ាងល្អពីពីជគណិតដំបូង ។ វាអាចត្រូវបានបង្ហាញថាសំណល់ពិតនៃចំនួនពិត x និង y ។

ច្បាប់និទស្សន្ត បើ a និង b ជាចំនួនវិជ្ជមានហើយ x និង y ជាចំនួនពិតនោះ:

1. $a^{x+y}=a^x a^y$

2. $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{b^y}$

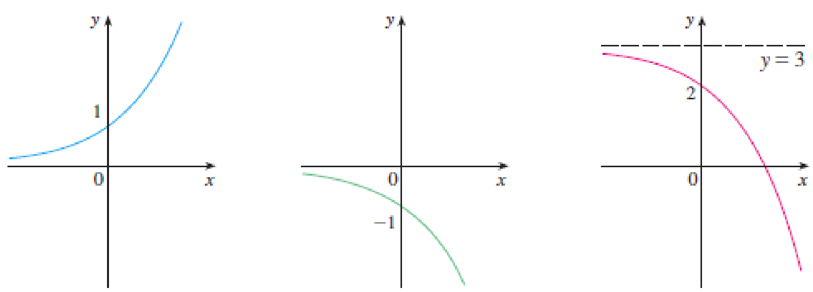
3. $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$

4. $(ab)^x=a^x b^x$

ឧទាហរណ៍ទី1 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=3-2^x$ ហើយកំណត់ដែនកំណត់របស់វាហើយនឹងរូបភាព ។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងបត់ក្រាបនស $y=2^x$ (បង្ហាញក្នុងរូបភាពទី2និងទី5ក)ឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស x ដើម្បីបានក្រាបនៃ $y=-2^x$ ក្នុងរូបភាពទី5 (ខ) ។ បន្ទាប់មកយើងរំកិលក្រាបនៃ $y=-2^x$ ឡើងលើចំនួន 2 ឯកតាដើម្បីបានក្រាបនៃ $y=3-2^x$ ក្នុងរូបភាពទី5(គ) ។ ដែនកំណត់គឺ□ និងរូបភាពគឺ $(-\infty,3)$ ។

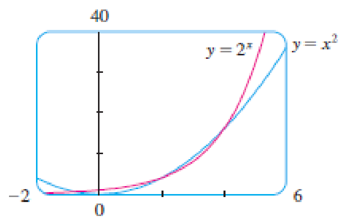


ក. $y=2^x$ ខ. $y=-2^x$ គ. $y=3-2^x$

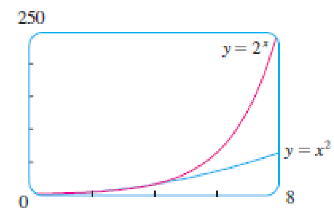
ឧទាហរណ៍ទី2 : ប្រើក្រាបដើម្បីប្រៀបធៀបអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=2^x$ និងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ $g(x)=x^2$ ។ តើអនុគមន៍មួយណាកើនលឿននៅពេលតម្លៃ x ធំ ?

ដំណោះស្រាយ

រូបភាពទី6 បង្ហាញក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរក្នុងរូបចតុកោណកែង $[-2,6]$ ដោយ $[0,40]$ ។ យើងឃើញថា ក្រាបប្រសព្វគ្នាបីដង ប៉ុន្តែចំពោះ $x>4$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=2^x$ ស្ថិតនៅចន្លោះក្រាបនៃ $g(x)=x^2$ ។ រូបភាពទី7 ផ្តល់នូវរូបភាពទាំងមូលបន្ថែមមួយទៀតហើយបង្ហាញថាចំពោះតម្លៃធំនៃ x អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=2^x$ កើនឆ្ងាយរហ័សជាងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ $y=x^2$ ។



រូបភាពទី6



រូបភាពទី7

***អនុវត្តន៍នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកើតឡើងយ៉ាងញឹកញាប់ក្នុងគម្រូគណិតវិទ្យានៃធម្មជាតិ និងសង្គម ។ នេះយើងបង្ហាញយ៉ាងខ្លីពីវិធីដែលវាកើតឡើងនៅក្នុងការពណ៌នានៃកំណើនប្រជាជន ។ នៅក្នុងជំពូកក្រោយយើងនឹងធ្វើតាមទាំងនេះហើយការអនុវត្តន៍ផ្សេងទៀតលម្អិតកាន់តែច្រើន ។

ដំបូងយើងគិតទៅលើចំនួននៃបាក់តេរីស្រដៀងគ្នាក្នុងសារធាតុចិញ្ចឹមជាមធ្យម ។ ឧបមាថាដោយគម្រូប្រជជននៅចន្លោះប្រាកដវាត្រូវបានកំណត់ថាចំនួនប្រជាជនទ្វេដងរៀងរាល់ម៉ោង ។ បើចំនួននៃបាក់តេរីនៅពេល t គឺ $p(t)$ ដែល t គិតជាម៉ោង ហើយចំនួនប្រជាជនដំបូងគឺ $p(0)=1000$ នោះយើងមាន

$$p(1)=2p(0)=2\times1000$$

$$p(2)=2p(1)=2^2\times1000$$

$$p(3)=2p(2)=2^3\times1000$$

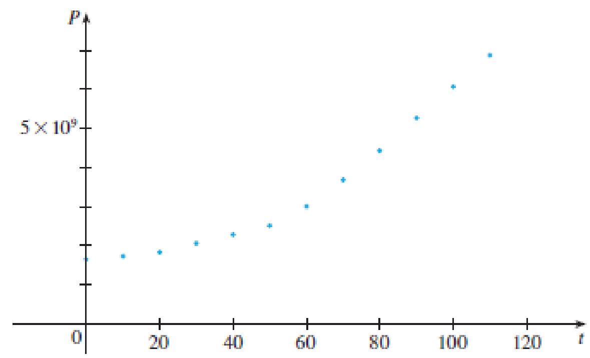
ពីលំនាំគម្រូនេះយើងទាញបានជាទូទៅមួយគឺ $p(t)=2^t\times1000=(1000)2^t$

នេះជាអនុគមន៍ចំនួនប្រជាជនគឺជាពហុគុណចំនួនថេរមួយនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=2^t$ ដូច្នេះវាបង្ហាញពីការកើនឡើងយ៉ាងរហ័សដែលយើងសង្កេតមើលក្នុងរូបភាពទី2 និងទី7 ។ ក្រោមលក្ខខណ្ឌល្អ

បំផុត(ចន្លោះមិនកំណត់ សារធាតុចិញ្ចឹម និងអវត្តមាននៃជំងឺ) អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនេះកើនឡើងធម្មតានៃអ្វីដែលកើតឡើងយ៉ាងពិតប្រាកដនៅក្នុងធម្មជាតិ។

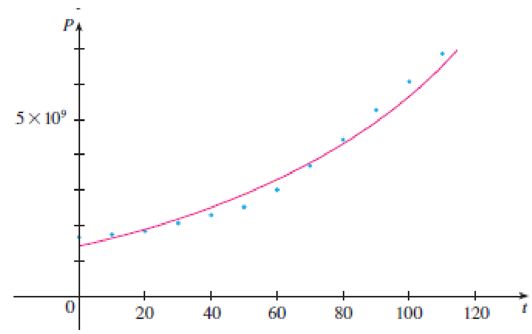
តើអ្វីដែលនិយាយអំពីចំនួនប្រជាជន ? តារាងទី1 បង្ហាញទិន្នន័យសម្រាប់ចំនួនប្រជាជនក្នុងពិភពលោកក្នុងសតវត្សទី20ហើយរូបភាពទី8 បង្ហាញពីភាពត្រូវគ្នានៃ scatter Plot ។

t	Population (millions)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870



រូបភាពទី8

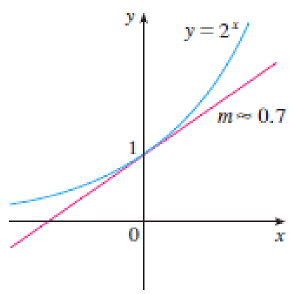
លំនាំនៃចំណុចទិន្នន័យក្នុងរូបភាពទី8 បង្ហាញពីការកើនឡើងនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ដូច្នេះយើងប្រើម៉ាស៊ីនគូសក្រាបជាមួយនឹងសមត្ថភាពតម្រែតម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដើម្បីអនុវត្តវិធីសាស្ត្រនៃការេយ៉ាងតិចហើយទទួលបានគម្រូអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $P=(1436.53)\cdot(1.01395)^t$ ដែល $t=0$ ត្រូវគ្នាទៅនឹង 1900 ។ រូបភាពទី9 បង្ហាញថាក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនេះទាំងអស់ជាមួយនឹងចំណុចទិន្នន័យដំបូង ។ យើងឃើញថាខ្សែកោងអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលឆ្លើយតបទៅនឹងទិន្នន័យបានយ៉ាងល្អ ។ អំឡុងពេលនៃទំនាំទំនងនៃចំនួនប្រជាជនកើនឡើងយឺតគឺត្រូវបានពន្យល់ដោយសង្គ្រាមលោកពីរនឹងអម្ពីបាក់ទឹកចិត្តដ៏ធ្ងន់ធ្ងរនៃទសវត្សឆ្នាំ1930 ។



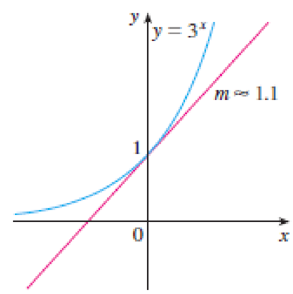
(រូបភាពទី9)

***ចំនួន e**

គ្រប់តម្លៃអាស្រ័យដែលអាចទៅរួចទាំងអស់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយ មានមួយដែលល្អបំផុត ចំពោះគោលបំណងនៃការគណនា ។ ជម្រើសនៃតម្លៃអាស្រ័យ a មួយគឺត្រូវបានជះឥទ្ធិពលទៅលើក្រាប នៃ $y=a^x$ កាត់តាមអ័ក្ស y ។ រូបភាពទី10 និងទី11 បង្ហាញពីបន្ទត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបនៃ $y=2^x$ ហើយ $y=3^x$ នៅចំណុច $(0,1)$ ។ (បន្ទាត់ប៉ះនឹងត្រូវបានកំណត់យ៉ាងច្បាស់នៅក្នុងចំណុច2.7 ។ ចំពោះគោល បំណងនេះអ្នកអាចគិតពីបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយនៅចំណុចមួយពេល ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបនៅចំណុចនោះ) ។ ប្រសិនបើយើងរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងនេះ នៅចំណុច $(0,1)$ យើងរកឃើញថា $m\approx 0.7$ ចំពោះ $y=2^x$ ហើយ $m\approx 1.1$ ចំពោះ $y=3^x$ ។

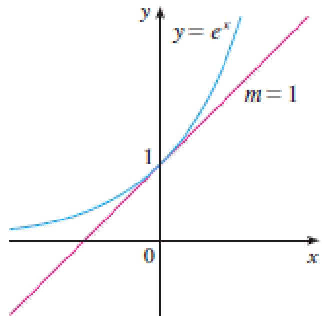


រូបភាពទី10

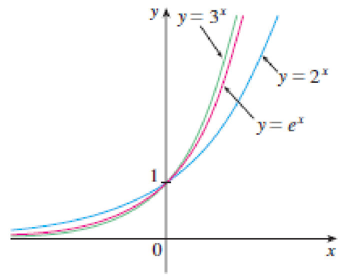


រូបភាពទី11

វាបានប្រែចេញពេលដែលយើងនឹងមើលក្នុងជំពូកទី3 ដែលរូបមន្តខ្លះនៃការគណនានឹងមានភាពស សាមញ្ញបំផុតប្រសិនបើយើងយកតម្លៃអាស្រ័យ a ដូច្នេះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ដែលប៉ះទៅនឹង $y=a^x$ នៅត្រង់ចំណុច $(0,1)$ គឺស្មើ1 ។ (មើលរូបភាពទី12) ជាការពិតណាស់មានចំនួនមួយហើយវាត្រូវបាន តាងដោយអក្សរមួយគឺ e ។ (កាសរកំណត់នេះត្រូវបានជ្រើសរើសដោយអ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិស្វីសគឺ លោក Leohard Euler ក្នុងឆ្នាំ1727 ព្រោះវាជាអក្សរដំបូងនៃពាក្យអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល) ។ ក្នុងរូបភាព ទី10 និងទី11 វាកើតឡើងពេលភ្ញាក់ផ្អើលដែលចំនួន e ស្ថិតនៅចន្លោះ 2 និង 3 ហើយក្រាបនៃ $y=e^x$ ស្ថិតនៅចន្លោះក្រាបនៃ $y=2^x$ និង $y=3^x$ ។ (មើលក្នុងរូបភាពទី13) ក្នុងជំពូកទី3 យើងនឹងឃើញថាតម្លៃ នៃ e ត្រឹមត្រូវចំពោះទសភាគ5ខ្ទង់គឺ $e\approx 2.71828$ យើងហៅអនុគមន៍ $f(x)=e^x$ ថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណ ង់ស្យែលធម្មជាតិ ។



រូបភាពទី12



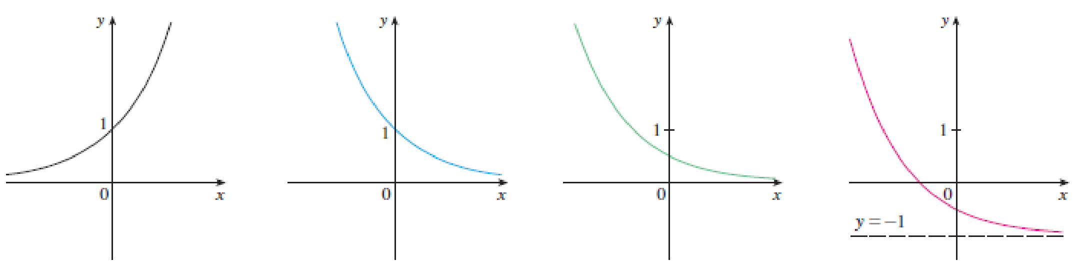
រូបភាពទី13

ឧទាហរណ៍ទី3 : គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ ហើយរកដែនកំណត់ និងរូបភាព ។

ដំណោះស្រាយ

យើងចាប់ផ្តើមជាមួយក្រាបនៃ $y = e^x$ ពីរូបភាពទី12 និងទី14(ខ) ហើយឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងអ័ក្ស y ដើម្បីបានក្រាបនៃ $y = e^{-x}$ ក្នុងរូបភាពទី14(ខ) ។ (សម្គាល់ថាក្រាបកាត់តាមអ័ក្ស y ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -1) ។ បន្ទាប់មកយើងបង្ខិតក្រាបនៅលើអ័ក្សឈរដោយ 1 ឯកតាចែកជា 2 ដើម្បីទទួលបានក្រាប $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ក្នុងរូបភាពទី14(គ) ។ នៅចុងបញ្ចប់យើងរំកិលក្រាបចុះក្រោម 1 ឯកតាដើម្បីបានក្រាបក្នុងរូបភាពទី14(ឃ) ។ ដែនកំណត់គឺ ហើយរូបភាពគឺ $(-1, +\infty)$ ។

រូបភាពទី14



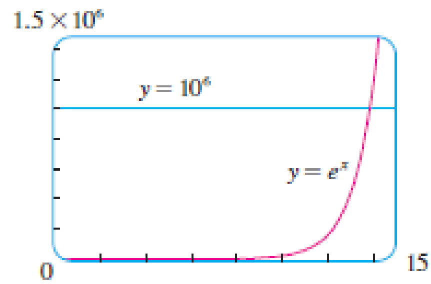
ក. $y = e^x$ ខ. $y = e^{-x}$ គ. $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ឃ. $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

តើតម្លៃប៉ុន្មានដែលត្រឹមត្រូវដែលអ្នកគិតថាយើងត្រូវតែមានសម្រាប់កម្ពស់នៃក្រាប $y = e^x$ ដើម្បីលើសមួយលាន ? ឧទាហរណ៍បន្ទាប់បង្ហាញពីការកើនឡើងយ៉ាងរហ័សនៃអនុគមន៍នេះដោយផ្តល់ចម្លើយមួយដែលអាចធ្វើឲ្យអ្នកភ្ញាក់ផ្អើល ។

ឧទាហរណ៍ទី4 : ប្រើក្រាបដើម្បីរកតម្លៃនៃ x ចំពោះ $e^x > 1,000,000$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក្នុងរូបភាពទី15 យើងគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$ ហើយអាស៊ីមតូតដេក $y = 1,000,000$ ។ យើងឃើញថាខ្សែកោងនេះប្រសព្វគ្នានៅពេល $x \approx 1.38$ ។ ដូចនេះ $e^x > 10^6$ នៅពេល $x > 1.38$ ។ វាប្រហែលជាភ្ញាក់ផ្អើលថាតម្លៃនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានតម្លៃមួយលាននៅពេល x មានតម្លៃត្រឹមតែ14 ប៉ុណ្ណោះ ។



រូបភាពទី15

លំហាត់

1-4. ប្រើច្បាប់និទស្សន្តដើម្បីសរសេរឡើងវិញហើយមនឹងរកមព្ភកន្សោមសាមញ្ញ ។

1.ក. $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ ខ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2.ក. $8^{\frac{4}{3}}$ ខ. $x\left(3x^2\right)^2$

3.ក. $b^8(2b)^4$ ខ. $\dfrac{\left(6y^3\right)^4}{2y^5}$

4.ក. $\dfrac{x^{2n}\cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ ខ. $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5.ក.សរសេរសមីការដែលកំណត់អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាមួយនឹងតម្លៃអាស្រ័យ $a > 0$ ។

ខ.តើដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះស្មើប៉ុន្មាន ?

គ.បើ $a \neq 1$ តើរូបភាពនៃអនុគមន៍នេះស្មើប៉ុន្មាន ?

ឃ.ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

$i.\ a>1$ $ii.\ a=1$ $iii.\ 0<a<1$

6.ក.តើចំនួន e ត្រូវបានកំណត់យ៉ាងដូចម្តេច?

ខ.តើតម្លៃប៉ាន់ស្មានចំពោះ e ស្មើប៉ុន្មាន?

គ.តើអ្វីជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលធម្មជាតិ?

7-10 . ក្រាបត្រូវបានផ្តល់ឲ្យដោយអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះ ។ តើក្រាបទាំងនេះទាក់ទងគ្នាយ៉ាងដូចម្តេច?

7. $y=2^x, y=e^x, y=5^x, y=20^x$

8. $y=e^x, y=e^{-x}, y=8^x, y=8^{-x}$

9. $y=3^x, y=10^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y=0.9^x, y=0.6^x\ y=0.3^x, y=0.1^x$

11-16. បង្កើតក្រាបព្រាងមួយចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ ។ កុំប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនគ្រាន់តែប្រើក្រាបដែលផ្តល់ឲ្យនៅក្នុងរូបភាពទី3 ហើយនឹងទី13ហើយប្រសិនបើវាចាំបាច់មានការបម្លែងនៅចំណុចទី1.3 ។

11. $y=10^{x+2}$ 12. $y=(0.5)^x-2$ 13. $y=-2^{-x}$

14. $y=e^{|x|}$ 15. $y=1-\frac{1}{2}e^{-x}$ 16. $y=2\left(1-e^x\right)$

17. ដោយចាប់ផ្តើមពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=e^x$ ចូរសរសេរសមីការនៃក្រាបដែលមានលទ្ធផលពី :

ក.រំកិលចុះក្រោម 2 ឯកតា

ខ.រំកិល 2 ឯកតាទៅស្តាំ

គ.ឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស x

ឃ.ឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស y

ង.ឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស x ហើយបន្ទាប់មកនឹងអ័ក្ស y ។

18.ចាប់ផ្ដើមពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=e^x$ រកសមីការនៃក្រាបដែលមានលទ្ធផលពី :

ក.ឆ្លុះទៅនឹងបន្ទាត់ $y=4$

ខ.ឆ្លុះទៅនឹងបន្ទាត់ $x=2$

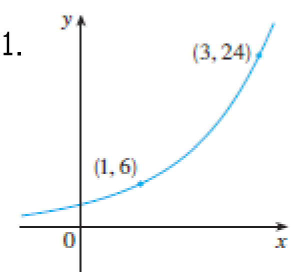
19-20. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នីមួយៗ

19.ក. $f(x)=\dfrac{1-e^{x^2}}{1-e^{1-x^2}}$ ខ. $f(x)=\dfrac{1+x}{e^{\cos x}}$

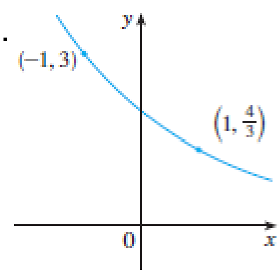
20.ក. $g(t)=\sin\left(e^{-t}\right)$ ខ. $g(t)=\sqrt{1-2^t}$

21-22. រកអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=Ca^x$ តាមក្រាបដែលបានផ្ដល់ឲ្យ

21.



22.



23. បើ $f(x)=5^x$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=5^x\left(\dfrac{5^h-1}{h}\right)$

24. ឧបមាថាអ្នកត្រូវបានគេផ្ដល់ការងារមួយនៅមួយខែចុងក្រោយ ។ តើវិធីសាស្ត្រផ្ដល់ប្រាក់មួយណាដែលអ្នកពេញចិត្ត ?

ក. មួយលានដុល្លារនៅខែចុងក្រោយ ។

ខ. មួយសេននៅថ្ងៃដំបូងនៃខែ ពីរសេននៅថ្ងៃទីពីរ បួនសេននៅថ្ងៃទីបី ហើយជាទូទៅ 2^{n-1} សេននៅថ្ងៃទី n ។

25. ឧបមាថាក្រាតបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ និង $g(x)=2^x$ ត្រូវបានគូសនៅលើប្លង់កូអរដោនេដែលឯកតា 1 អ៊ីង ។ បង្ហាញថានៅចម្ងាយ $2\,ft$ ទៅស្ដាំនៃគល់តម្រុយ កម្ពស់នៃក្រាបនៃអនុគមន៍ f គឺ $48\,ft$ ប៉ុន្តែកម្ពស់នៃក្រាបនៃ g គឺប្រហែល $265\,mi$ ។

26. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ $f(x)=x^5$ និង $g(x)=5^x$ ដោយក្រាបពីរនៃអនុគមន៍នៅក្នុងរូបចតុកោណកែង ។ រកគ្រប់ចំណុចប្រសព្វនៃក្រាបឲ្យបានត្រឹមត្រូវដោយយកទសភាគមួយខ្ទង់ ។ តើអនុគមន៍មួយណាកើនឡើងយ៉ាងរហ័សនៅពេល x ធំ?

27. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ $f(x)=x^{10}$ និង $g(x)=e^x$ ដោយក្រាបពីរ f និង g ក្នុងរូបភាពចតុកោណកែង ។ តើនៅពេលក្រាបនៃ g ហួសក្រាបនៃ f ?

28. ប្រើក្រាបដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ x ដែល $e^x > 1,000,000,000$ ។

29. ក្រោមលក្ខខណ្ឌពិតប្រាកដនៃចំនួនបាក់តេរីគឺត្រូវបានស្គាល់ទ្វេដងរៀងរាល់3ម៉ោង ។ ឧបមាថាមាន 100 បាក់តេរីដំបូង ។

ក. តើអ្វីជាទំហំនៃចំនួនប្រជាជនបន្ទាប់ពី15ម៉ោង ?

ខ. តើអ្វីជាទំហំនៃចំនួនប្រជាជនបន្ទាប់ពី t ម៉ោង ?

គ. ចូរប៉ាន់ស្មានទំហំនៃចំនួនប្រជាជនបន្ទាប់ពី 20 ម៉ោង?

ឃ. គូសក្រាបអនុគមន៍ចំនួនប្រជាជន ហើយប៉ាន់ស្មានពេលចំពោះចំនួនប្រជាជនឈានដល់ $50,000$ ។

30. ទម្លាប់របស់បាក់តេរីចាប់ផ្តើមពី 500 បាក់តេរីហើយចំនួនទ្វេក្នុងទំហំរៀងរាល់កន្លះម៉ោង ។

ក. តើមានបាក់តេរីប៉ុន្មានបន្ទាប់ពីរយៈពេល3ម៉ោង?

ខ. តើមានបាក់តេរីប៉ុន្មានបន្ទាប់ពីរយៈពេល t ម៉ោង?

គ. តើមានបាក់តេរីប៉ុន្មានបន្ទាប់បីរយៈពេល 40 នាទី?

ឃ. គូសក្រាបអនុគមន៍ចំនួនប្រជាជន ហើយប៉ាន់ស្មានពេលចំពោះចំនួនប្រជាជនឈានដល់ $100,000$ ។

31. ប្រើម៉ាស៊ីនគូសក្រាប និងសមត្ថភាពតម្រែតម្រង់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដើម្បីបានគម្រូចំនួនប្រជាជននៃពិភពលោកជាមួយទិន្នន័យពីឆ្នាំ1950ដល់2010ក្នុងតារាងទី1 នៅទំព័រតី54 ។ ប្រើប្រាស់គម្រូនេះដើម្បីប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ1993 ហើយនឹងទស្សទាយចំនួនប្រជាជននៅឆ្នាំ2020 ។

32. តារាងដែលផ្តល់ឲ្យជាចំនួនប្រជាជននៃសហរដ្ឋអាមេរិចមានមួយលាននាក់នៅឆ្នាំ1900ដល់ឆ្នាំ2010 ។ ប្រើម៉ាស៊ីនគូសក្រាបជាមួយនឹងសមត្ថភាពននៃតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរដើម្បីបានគម្រូចំនួនប្រជាជនសហ

រដ្ឋអាមេរិចចាប់តាំងពីឆ្នាំ1900 ។ ប្រើប្រាស់គម្រូដើម្បីប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ1925 ហើយទស្សទាយចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ2020 ។

Year	Population	Year	Population
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150	2010	310

33. បើអ្នកគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ អ្នកនឹងឃើញថាអនុគមន៍ f កើតឡើងជាអនុគមន៍សេស ។ ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍នេះជាំអនុគមន៍សេស ។

34. ក្រាបនៃសមាជិកគ្រួសារនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{1+ae^{bx}}$ ដែល $a>0$ ។ តើក្រាបប្រែប្រួលដូចម្តេចនៅពេល b ប្រែប្រួល? តើក្រាបប្រែប្រួលដូចម្តេចនៅពេល a ប្រែប្រូល ?

***អនុគមន៍ច្រាស និងអនុគមន៍លោការីត**

តារាងទី1ផ្តល់ទន្និន័យពីដែលចំនួនបាក់តេរីចាប់ផ្តើមពី100 បាក់តេរីក្នុងសារជាតុចិញ្ចឹមមធ្យមមួយ; ទំហំនៃចំនួនបាក់តេរីត្រូវបានកត់ត្រានៅចន្លោះម៉ោង ។ ចំនួននៃបាក់តេរី N គឺជាអនុគមន៍នៃពេល t : $N=f(t)$ ។

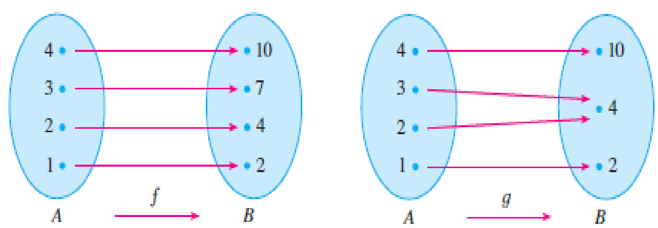
ឧបមាថាទោះបីជាអ្នកវិទ្យាសាស្ត្របានផ្លាស់ប្តូរចំណុចនៃរូបភាពរបស់នាងហើយក្លាយទៅជាការចាប់អារម្មណ៍ក្នុងពេលស្នើសុំចំពោះចំនួនប្រជាជនដើម្បីឈានដល់កម្រិតផ្សេងគ្នា ។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀតនាងកំពុងគិត t ជាអនុគមន៍នៃ N ។ អនុគមន៍ត្រូវបានគេហៅថាជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ f កំណត់ដោយ f^{-1} ហើយអានថា f ច្រាស ។ ដូចនេះ $t=f^{-1}(N)$ ជាពេលស្នើសុំចំពោះកម្រិតចំនួនប្រជាជនឈានដល់ N ។ តម្លៃនៃ f^{-1} អាចត្រូវបានស្វែងរកដោយការអានតារាងទី1ពីស្តាំទៅឆ្វេង ឬក៏ដោយការពិភាក្សាលើតារាងទី2 ។ ជាឧទាហរណ៍ $f^{-1}(550)=6$ ព្រោះ $f(6)=550$ ។

តារាងទី1 N ជាអនុគមន៍នៃ t តារាងទី2 t ជាអនុគមន៍នៃ N

t (hours)	$N = f(t)$ = population at time t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

N	$t = f^{-1}(N)$ = time to reach N bacteria
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

មិនមែនគ្រប់អនុគមន៍ជាអនុគមន៍ច្រាសនោះទេ ។ ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ f និង g ដែលដ្យាក្រាមបង្ហាញ នៅក្នុងរូបភាពទី1សម្គាល់ថាអនុគមន៍ f មិនយកតម្លៃដូចគ្នាពីរដងនោះទេ(ជាតុចូលរបស់ A ផ្សេងហើយ ជាតុចេញរបស់ A ផ្សេង) ។ ដែល g យកតម្លៃដូចគ្នាពីរ(ចំនួនពីរគឺ 2 និង 3 មានជាតុចេញដូចគ្នាគឺ 4) ។ គេកំណត់សរសេរ $g(2)=g(3)$ ក៏ប៉ុន្តែ $f(x_1)\neq f(x_2)$ ដែល $x_1\neq x_2$ ។ អនុគមន៍ដែលដែលចែករំលែកជាតុជាមួយនឹង f ត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។



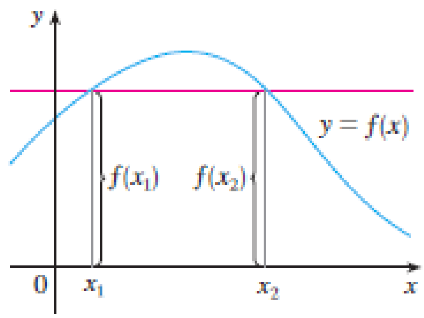
រូបភាពទី1

និយមន័យ : អនុគមន៍ f មួយត្រូវបានហៅថាជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ប្រសិនបើវាមិនយកតម្លៃដូចគ្នាពីរដង នៃអថេរ។

$$f(x_1)\neq f(x_2) \text{ ដែល } x_1\neq x_2$$

ប្រសិនបន្ទាត់ដេកមួយប្រសព្វនៃ f ច្រើនជាងមួយចំណុចនោះយើងឃើញក្នុងរូបភាពទី2ដែលមានចំនួន x_1 និង x_2 ដែល $f(x_1)\neq f(x_2)$ ។ នេះមានន័យថា f គឺមិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេ ។ ដូចនេះ យើងមានវិធីសាស្ត្របែបធរណីមាត្រដើម្បីកំណត់អនុគមន៍មួយគឺអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

ប្រសិនអនុគមន៍មួយជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ លុះត្រាតែបន្ទាត់ឈរប្រសព្វទៅនឹងក្រាបរបស់វាមិនច្រើនជាងមួយចំណុច ។



រូបភាពទី2

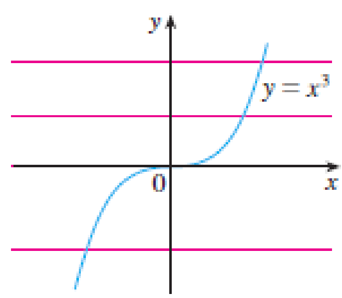
ឧទាហរណ៍ទី1 : តើអនុគមន៍ $f(x) = x^3$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេ ?

ដំណោះស្រាយទី1

បើ $x_1 \neq x_2$ នោះ $x_1^3 \neq x_2^3$ (ចំនួនពីរផ្សេងគ្នាមិនអាចមានស្វ័យគុណគូបដូចគ្នាបានទេ) ។ ដូច្នេះតាមរយៈនិយមន័យទី1 $f(x) = x^3$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

ដំណោះស្រាយទី2

ពីរូបភាពទី3យើងឃើញថាគ្មានបន្ទាត់ឈរប្រេសព្វក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3$ ច្រើនជាងមួយដង ។ ដូច្នេះ តាមរយៈនិយមន័យទី2 f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។



រូបភាពទី3

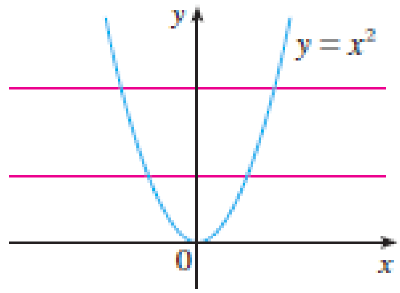
ឧទាហរណ៍ទី2 : តើអនុគមន៍ $g(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយឬទេ ?

ដំណោះស្រាយទី1

អនុគមន៍នេះមិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេព្រោះ ជាឧទាហរណ៍ $g(1) = g(-1) = 1$ ហើយដូច្នេះ1 និង -1 មានធាតុចេញដូចគ្នា ។

ដំណោះស្រាយទី2

ពីរូបភាពទី4 យើងឃើញថាមានបន្ទាត់ដេកដែលប្រសព្វនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ g ច្រើនជាងមួយដង ។ ដូចនេះតាមរយៈការសាកល្បងបន្ទាត់ឈរ g មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេ ។



រូបភាពទី4

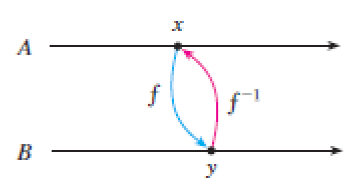
អនុគមន៍មួយទល់មួយគឺជាអនុគមន៍សំខាន់ព្រោះវាជាអនុគមន៍ច្បាស់លាស់ដែលជាអនុគមន៍ច្រាសអាស្រ័យទៅតាមនិយមន័យ ។

និយមន័យ : តាង f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយជាមួយដែនកំណត់ A និងរូបភាព B ។ នោះអនុគមន៍ច្រាស f^{-1} មានដែនកំណត់ B និងរូបភាព A ហើយកំណត់ដោយ $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$ ចំពោះ y ខ្លះនៅក្នុង B ។

នេះជានិយមន័យដែលនិយាយថាប្រសិនបើ f មាន x ក្នុង y នោះ f^{-1} មាន y ក្នុង x វិញ ។ (ប្រសិនបើ f មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេនោះ f^{-1} នឹងមិនត្រូវបានកំណត់តែមួយគត់ទេ) គំនូសបំព្រួញនៃអ៊ីស្តូក្រាមក្នុងរូបភាពទី5បង្ហាញថា f^{-1} មានឥទ្ធិពលឡើងវិញនៃ f សម្គាល់ថា :

-ដែនកំណត់នៃ f^{-1} ស្មើនឹងរូបភាពនៃ f

-រូបភាពនៃ f^{-1} ស្មើនឹងដែនកំណត់នៃ f



រូបភាពទី5

ជាឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^3$ គឺ $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ព្រោះបើ $y=x^3$ នោះ

$f^{-1}(y)=f^{-1}(x^3)=(x^3)^{\frac{1}{3}}=x$

*ប្រុងប្រយ័ត្ន : កុំបង្កើតកំហុសចំពោះ -1 ក្នុង f^{-1} ចំពោះនិទស្សន្ត ។ ដូចនេះ f^{-1} មិនមែនមានន័យថា $\dfrac{1}{f(x)}$ ទេ ចម្រាស់ $\dfrac{1}{f(x)}$ អាចទោះបីជាត្រូវបានសរសេរជា $[f(x)]^{-1}$ ក៏ដោយ ។

ឧទាហរណ៍ទី3 : បើ $f(1)=5, f(3)=7$ និង $f(8)=-10$ ។ រក $f^{-1}(7), f^{-1}(5)$ និង $f^{-1}(-10)$ ។

ដំណោះស្រាយ

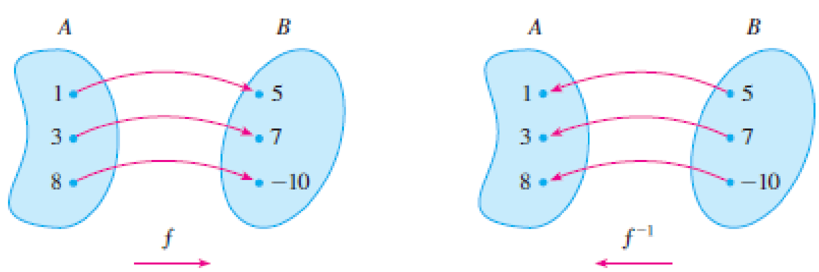
តាមនិយមន័យនៃ f^{-1} យើងបាន

$f^{-1}(7)=3$ ព្រោះ $f(3)=7$

$f^{-1}(5)=1$ ព្រោះ $f(1)=5$

$f^{-1}(-10)=8$ ព្រោះ $f(8)=-10$

ក្រាបក្នុងរូបភាពទី6 វាបានបង្កើតយ៉ាងច្បាស់ពីវិធីដែល f^{-1} មានប្រសិទ្ធិភាពមកលើ f វិញក្នុងករណីនេះ ។



រូបភាពទី6

អក្សរ x ជាញឹកញាប់ត្រូវបានប្រើជាអថេរមិនអាស្រ័យ ដូច្នេះនៅពេលដែលយើងផ្តោតទៅលើ f^{-1} ជាជាងលើ f យើងតាមធម្មតាត្រឡប់ទីតាំងនៃ x និង y ក្នុងនិយមន័យទី2 គេកំណត់សរសេរ :

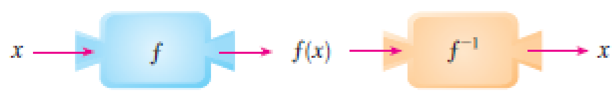
$$\boxed{f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x}$$

ដោយការផ្លាស់ប្តូរចំពោះ y ក្នុងនិយមន័យទី2 និងផ្លាស់ប្តូរចំពោះ x ក្នុងនិយមន័យទី3 យើងនឹងទទួលបានសមីការបំបាត់ ។

$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុង A

$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ x ក្នុង B

ការបំបាត់នៃសមីការដំបូងនិយាយថាប្រសិនបើយើងចាប់ផ្តើមជាមួយ x អនុវត្តក្នុង f ហើយបន្ទាប់មកអនុវត្តក្នុង f^{-1} យើងបានមកវិញនូវ x ដែលយើងបានចាប់ផ្តើម(មើលរូបភាពទី7) ។ ដូចនេះ f^{-1} មិនមានអ្វីក្នុង f ហើយសមីការទី2និយាយថា f មិនមានអ្វីក្នុង f^{-1} ។



រូបភាពទី7

ជាឧទាហរណ៍ បើ $f(x)=x^3$ នោះ $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ហើយដូចនេះសមីការបំបាត់ក្លាយជា

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}=x$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=x$$

សមីការធម្មតាទាំងនេះដែលនិយាយថាអនុគមន៍គូប និងអនុគមន៍ស្វ័យគុណគូបផ្សេងទៀតនៅពេលបានអនុវត្តន៍ក្នុងការដោតជ័យ ។

ឥឡូវយើងមើលពីវិធីរកអនុគមន៍ច្រាស ។ បើយើងមានអនុគមន៍មួយ $y=f(x)$ ហើយអាចដោះស្រាយសមីការនេះចំពោះ x នៃ y នោះផ្អែកទៅលើនិយមន័យទី2យើងគួរតែមាន $x=f^{-1}(y)$ ។ ប្រសិនយើងចង់ហៅ x ថាជាតម្លៃមិនអាស្រ័យ យើងផ្លាស់ប្តូរ x ទៅជា y ហើយតាងសមីការ $y=f^{-1}(x)$ ។

តើយើងអាចរកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍មួយទល់មួយ f តាមវិធីណា?

ជំហានទី1 : សរសេរ $y = f(x)$

ជំហានទី2 : ដោះស្រាយសមីការនេះចំពោះ x នៃ y (ប្រសិនបើអាចទៅរួច) ។

ជំហានទី3 : ដើម្បីបង្ហាញ f^{-1} ជាអនុគមន៍នៃ x យើងត្រូវផ្លាស់ប្តូរពី x ទៅ y ។ លទ្ធផលនៃសមីការគឺ $y = f^{-1}(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី4 : រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3 + 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរយៈពេលនិយមន័យទី5 យើងសរសេរដំបូង $y = x^3 + 2$

នោះយើងដោះស្រាយសមីការនេះចំពោះ x :

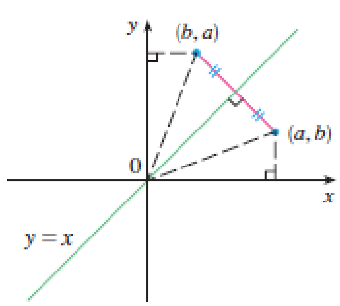
$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y-2}$$

ចុងក្រោយយើងត្រូវផ្លាស់ប្តូរពី x ទៅ y : $y = \sqrt[3]{x-2}$

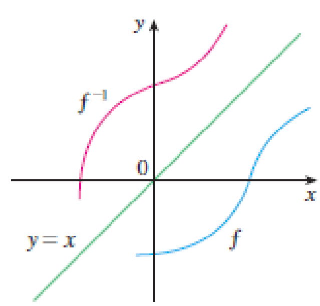
ដូចនេះ អនុគមន៍ច្រាសគឺ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ ។

គោលការណ៍នៃការផ្លាស់ប្តូរពី x ទៅ y ដើម្បីរកអនុគមន៍ច្រាសក៏ផ្តល់ឲ្យយើងនូវវិធីដើម្បីទទួលបាន

ក្រាបនៃ f^{-1} ពីក្រាបនៃ f ។ ប្រសិនបើ $f(a) = b$ ហើយ $f^{-1}(b) = a$ ប្រសិនបើចំណុច (a,b) គឺនៅលើក្រាបនៃ f ហើយចំពោះ (b,a) គឺនៅលើក្រាបនៃ f^{-1} ។ ក៏ប៉ុន្តែយើងបានចំណុច (b,a) ពី (a,b) ដោយឆ្លុះទៅនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។ (មើលរូបភាពទី8) ។



រូបភាពទី8



រូបភាពទី9

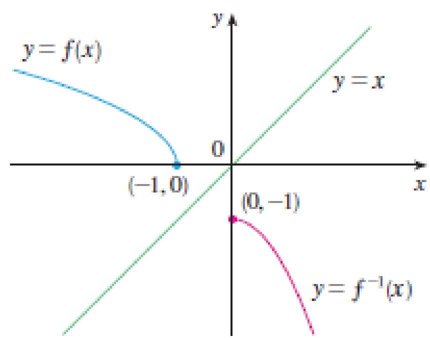
ដូចនេះត្រូវបានបង្ហាញដោយរូបភាពទី9

ក្រាបនៃ f^{-1} គឺត្រូវបានឆ្លុះទៅនឹងក្រាបនៃ f ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ឧទាហរណ៍ទី5 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{-1-x}$ ហើយនឹងអនុគមន៍ច្រាសរបស់វាក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងគូសខ្សែកោង $y=\sqrt{-1-x}$ (កំពូលពាក់កណ្តាលនៃប៉ារ៉ាបូល $y^2=-1-x$ ឬក៏ $x=-y^2-1$) ហើយបន្ទាប់មកយើងគូសក្រាបឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដើម្បីបានក្រាបនៃ f^{-1} ។ (មើលរូបភាពទី10) ពេលពិនិត្យនៅលើក្រាបរបស់យើងសម្គាល់ឃើញថាកន្សោមចំពោះ f^{-1} គឺ $f^{-1}(x)=-x^2-1, x\geq 0$ ។ ដូចនេះក្រាបនៃ f^{-1} គឺពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងស្តាំនៃប៉ារ៉ាបូល $y=-x^2-1$ ហើយនេះហាក់ដូចជាមូលហេតុពីរូបភាពទី10 ។



រូបភាពទី10

*អនុគមន៍លោការីត

បើ $a>0$ ហើយ $a\neq 0$ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=a^x$ គឺកើនឡើង ឬថយចុះហើយដូច្នេះវាជាអនុគមន៍មួយទល់មួយដោយនៅក្នុងចំណុចការសាកល្បងបន្ទាត់ដេក ។ វាក្លាយជាអណុគមន៍ច្រាស f^{-1} ដែលត្រូវបានហៅថាអនុគមន៍លោការីតគោល a ហើតត្រូវបានកំណត់ដោយ $\log_a$ ។ ប្រសិនបើយើងប្រើរូបមន្តនៃអនុគមន៍ច្រាសដែលផ្តល់ដោយរូបមន្តទី3 គឺ $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

នោះយើងបាន : $\boxed{\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x}$

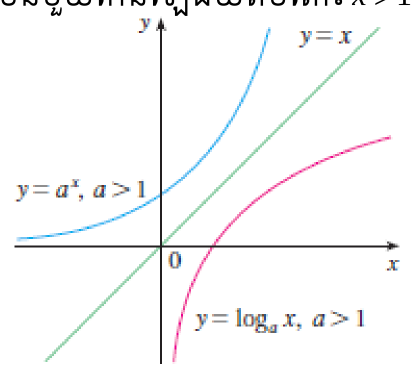
ដូចនេះ បើ $x>0$ នោះ $\log_a x$ គឺជានិទស្សន្តដែលគោល a ត្រូវបានលើកទៅឲ្យ x ។ ចំពោះ**ឧទាហរណ៍** : $\log_{10} 0.001=-3$ ព្រោះ $10^{-3}=0.001$ ។

សមីការបំបាត់ នៅពេលអនុវត្តក្នុងអនុគមន៍ $f(x)=a^x$ ហើយ $f^{-1}(x)=\log_a x$ ក្លាយជា :

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a(a)^x = x \text{ ចំពោះគ្រប់ } x\in\mathbb{R} \\ a^{\log_a x}=x \text{ ចំពោះគ្រប់ } x>0\end{array}}$$

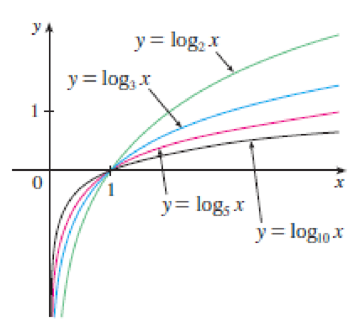
អនុគមន៍លោការីត $\log_a$ មានដែនកំណត់ $(0,+\infty)$ ហើយមានរូបភាព$\mathbb{R}$ ។ ក្រាបរបស់វាគឺឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a^x$ ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

រូបភាពទី11 បង្ហាញពីករណីដែល $a>1$ ។ អនុគមន៍លោការីតជាអនុគមន៍សំខាន់បំផុតមានគោល $a>1$) ។ ជាការពិតថាអនុគមន៍ $y=a^x$ គឺជាអនុគមន៍មួយដែលកើនឡើងយ៉ាងរហ័សចំពោះ $x>0$ ត្រូវបានឆ្លុះទៅនឹងអនុគមន៍ $y=\log_a x$ គឺជាអនុគមន៍មួយកើនឡើងយឺតចំពោះ $x>1$ ។



រូបភាពទី11

រូបភាពទី12 បង្ហាញពីក្រាប $y=\log_a x$ ជាមួយនឹងតម្លៃផ្សេងគ្នានៃគោល $a>1$ ។ ចាប់ពី $\log_a 1=0$ ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីតទាំងអស់ឆ្លងកាត់ចំណុច $(1,0)$ ។



រូបភាពទី12

បម្រាប់នៃអនុគមន៍លោការីតបានមកពីបម្រាស់ច្បាស់លាស់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលបានផ្តល់ឲ្យក្នុងចំណុច1.5 ។

រូបមន្តលោការីត : បើ x និង y ជាចំនួនវិជ្ជមាននោះគេបាន

1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
3. $\log_a\left(x^r\right)=r\log_a x$ ចំពោះ r ជាចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍ទី6 : ប្រើរូបមន្តអនុគមន៍លោការីតដើម្បីគណនាតម្លៃនៃ $\log_2 80-\log_2 5$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រើរូបមន្តទី2 យើងបាន $\log_2 80-\log_2 5=\log_2\left(\dfrac{80}{5}\right)=\log_2 16=4$ (ព្រោះ $2^4=16$)

***អនុគមន៍លោការីតនេពែ**

គ្រប់អនុគមន៍លោការីតទាំងអស់មានគោល a យើងនឹងឃើញនៅក្នុងជំពូកទី3 ដែលជម្រើសងាយនៃគោលគឺចំនួន e ដែលត្រូវបានកំណត់នៅក្នុងចំណុច1.5 ។ លោការីតគោល e ត្រូវបានហៅថាលោការីតធម្មជាតិ ហើយមានកំណត់សម្គាល់ពិសេសមួយ :

$$\boxed{\log_a x=\ln x}$$

បើយើងដាក់ $a=e$ ហើយផ្លាស់ប្តូរ $\log_e$ ទៅជា $\ln$ នោះតម្លៃនៃអនុគមន៍លោការីតធម្មជាតិទៅជា

$$\boxed{\ln x=y\Leftrightarrow e^y=x}$$

$$\ln(e^x)=x.x\in\mathbb{R}\text{ និង }e^{\ln x}=x,x>0$$

ក្នុងករណីពិសេសបើ $x=e$ យើងបាន

$$\boxed{\ln e=1}$$

ឧទាហរណ៍ទី7 : រក x បើ $\ln x=5$ ។

ដំណោះស្រាយទី1

$\ln 5 = x$ មានន័យថា $e^5 = x$

ដូចនេះ $x = e^5$ ។

ប្រសិនបើអ្នកមានបញ្ហាក្នុងការសម្គាល់ $\ln$ គ្រាន់តែផ្លាស់ប្តូរវាដោយ $\log_e$ ។ សមីការក្លាយទៅជា $\log_e x = 5$ ដូចនេះតាមនិយមន័យលោការីត $e^5 = x$ ។

ដំណោះស្រាយទី2 : ចាប់ផ្តើមជាមួយនឹងសមីការ $\ln x = 5$ ហើយអនុវត្តន៍អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ទាំងសងខាងនៃសមីការ : $e^{\ln x} = e^5$ ក៏ប៉ុន្តែសមីការបំបាត់ទី2 និយាយថា $e^{\ln x} = x$ ។ ដូចនេះ $x = e^5$ ។

ឧទាហរណ៍ទី8 : ដោះស្រាយសមីការ $e^{5-3x} = 10$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបំពាក់ $\ln$ លើអង្គទាំងសងខាងនៃសមីការ

$$\ln\left(e^{5-3x}\right) = \ln 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$3x = 5 - \ln 10$$

$$x = \frac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

ពីលោការីតធម្មជាតិគឺត្រូវបានរកនៅក្នុងម៉ាស៊ីនគិតលេខវិទ្យាសាស្ត្រយើងអាចគណនាតម្លៃប្រហែល : ចំនួនទសភាគ 4 ខ្ទង់ $x \approx 0.8991$ ។

ឧទាហរណ៍ទី9 : បង្ហាញថាកន្សោម $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ ជាលោការីតតែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រើរូបមន្តនៃលោការីតយើងបាន $\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{\frac{1}{2}}$

$$= \ln a + \ln\sqrt{b}$$

$$= \ln\left(a\sqrt{b}\right)$$

រូបមន្តក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើបានបង្ហាញថាលោការីតជាមួយគោលដែលអាចត្រូវបានបង្ហាញក្នុងtermនៃអនុគមន៍លោការីតធម្មជាតិ ។

រូបមន្តប្តូរគោល : ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន a ដែល $a \neq 1$ យើងបាន $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

បង្ហាញថាតាង $y = \log_a x$ យើងមាន $a^y = x$ បំពាក់លោការីតគោល e លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

យើងបាន $y \ln a = \ln x$

ដូចនេះ $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

ឧទាហរណ៍ទី10 : គណនាតម្លៃនៃ $\log_8 5$ ដោយយមតម្លៃទសភាគ6ខ្ទង់

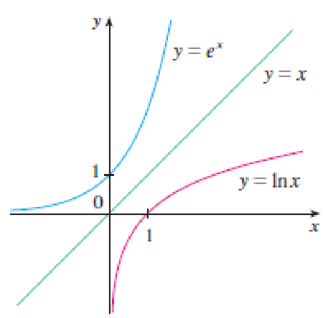
ដំណោះស្រាយ

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0,773976$$

ដូចនេះ $\log_8 5 \approx 0.773976$

*ក្រាប និងការកើននៃអនុគមន៍លោការីតគោល e

ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = e^x$ ហើយអនុគមន៍ច្រាសរបស់វាគឺអនុគមន៍លោការីតគោល e ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី13 ។ ព្រោះខ្សែកោង $y = e^x$ កាត់អ័ក្ស y ជាមួយនឹងមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ1 វាត្រូវបានឆ្លុះទៅនឹងខ្សែកោង $y = \ln x$ កាត់អ័ក្ស x ជាមួយនឹងមេគុណប្រាប់ទីស្មើ1 ។ វាត្រូវវបានឆ្លុះទៅនឹងខ្សែកោង $y = \ln x$ កាត់អ័ក្ស x ជាមួយនឹងមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ1 ។



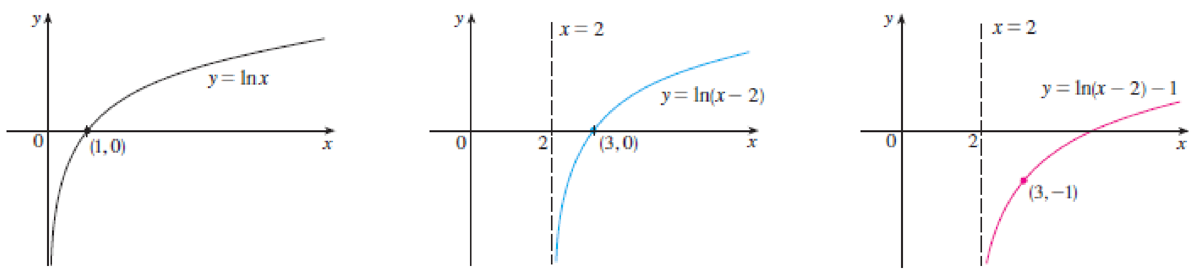
រូបភាពទី13

ក្នុងន័យធម្មតាជាមួយនឹងគ្រប់អនុគមន៍ផ្សេងទៀតជាមួយនឹងគោលធំជាងមួយ លោការីតធម្មជាតិគឺជាអនុគមន៍កើនកំណត់លើ $(0,+\infty)$ ហើយអ័ក្ស y គឺជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរ ។ (នេះមានន័យថាតម្លៃនៃ $\ln x$ ក្លាយជាតម្លៃវិជ្ជមានធំណាស់ពេល $x=0$)។

ឧទាហរណ៍ទី11 : ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\ln(x-2)-1$

ដំណោះស្រាយ

យើងចាប់ផ្តើមជាមួយក្រាបនៃ $y=\ln x$ បានផ្តល់ក្នុងរូបភាពទី13 ។ ប្រើការផ្លាស់ប្តូរនៃចំណុចទី1.3 យើងរំកិលវា 2 ឯកតាទៅស្តាំដើម្បីបានក្រាបនៃ $y=(x-2)$ ហើយបន្ទាប់មកយើងរំកិលវា 1 ឯកតាចុះក្រោមដើម្បីបានក្រាបនៃ $y=\ln(x-2)-1$ ។ (មើលរូបភាពទី14) ។

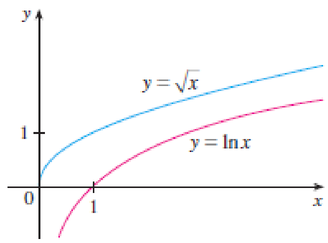


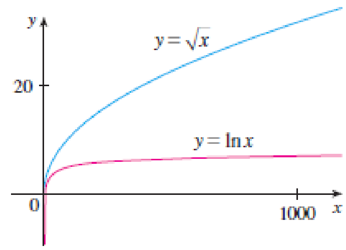
រូបភាពទី14

ទោះបីជាអនុគមន៍ $\ln x$ ជាអនុគមន៍កើន វាកើនយ៉ាងយឺតនៅពេល $x>1$ ។ ជាការពិត $\ln x$ កើនយឺតជាងអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៃ x ។ ដើម្បីបង្ហាញថានេះពិតយើងប្រៀបធៀបតម្លៃប្រហែល

នៃអនុគមន៍ $y=\ln x$ និង $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ ក្នុងតារាងហើយយើងគូសក្រាបវានៅក្នុងរូបភាពទី15 និងទី16 ។ អ្នកអាចឃើញថាក្រាបដំបូងនៃ $y=\sqrt{x}$ ហើយនឹង $y=\ln x$ កើនក្នុងអត្រាប្រៀបធៀបគ្នាក៍ប៉ុន្តែទីបំផុតអនុគមន៍ឬសការកើនឆ្ងាយហួសអនុគមន៍លោការីត ។

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10,000	100,000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04



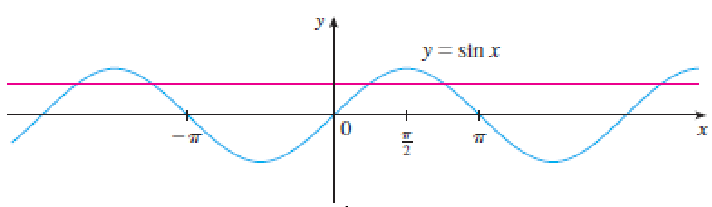


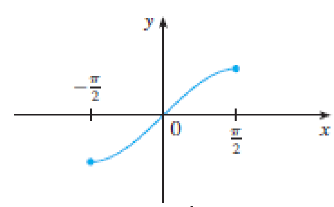
រូបភាពទី15 រូបភាពទី16

*អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

នៅពេលដែលយើងព្យាយាមរកអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រយើងមានភាពលំបាកបន្តិច : ព្រោះអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេវាមិនមានអនុគមន៍ច្រាសទេ ។ ដើម្បីជំនះភាពលំបាកដោយការដាក់កម្រិតនៃដែនកំណត់នសអនុគមន៍ទាំងនោះដូចនេះវាក្លាយជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

អ្នកអាចមើលក្នុងរូបភាពទី17ដែលអនុគមន៍ $\sin$ គឺ $y=\sin x$ មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយទេ (ប្រើប្រាស់ការសោកល្បងបន្ទាត់ដេក) ។ ក៏ប៉ុន្តែអនុគមន៍ $f(x)=\sin x, -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ គឺជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ(មើលរូបភាពទី18) ។ អនុគមន៍នៃកម្រិតអនុគមន៍ $\sin$ នេះ f មាននិងត្រូវបានកំណត់ដោយ $\sin^{-1}$ ឬក៏ $\arcsin$ ។ វាត្រូវបានហៅថាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\sin$ ឬក៏អនុគមន៍ $\arcsin$ ។





រូបភាពទី17 រូបភាពទី18

តាមរយៈនិយមន័យនៃអនុគមន៍ច្រាសមួយនិយាយថា $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

យើងបាន
$$\boxed{\sin^{-1}x=y \Leftrightarrow \sin y=x \text{ ហើយ } -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}}$$

សម្គាល់ : $\sin^{-1}x \neq \dfrac{1}{\sin x}$

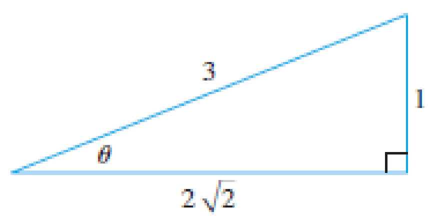
ដូចនេះ បើ $-1 \le x \le 1$ នោះ $\sin^{-1}x$ ជាចំនួនដែលនៅចន្លោះ $-\dfrac{\pi}{2}$ និង $\dfrac{\pi}{2}$ ដែល $\sin$ គឺជា x ។

ឧទាហរណ៍ទី12 : រកតម្លៃ ក. $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ និង ខ. $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងបាន $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ ព្រោះ $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ ហើយ $\dfrac{\pi}{6}$ ស្ថិតនៅចន្លោះ $-\dfrac{\pi}{2}$ និង $\dfrac{\pi}{2}$ ។

ខ. តាង $\theta=\arcsin\dfrac{1}{3}$ ដូចនេះ $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ នោះយើងអាចគូសត្រីកោណកែងមួយដែលមានមុំ θ ក្នុងរូបភាពទី19 ហើយទាញចេញពីទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រដែលជ្រុងទាំងបីមានប្រវែង $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ ។ នេះអាចឲ្យយើងអានពីត្រីកោណថា $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)=\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

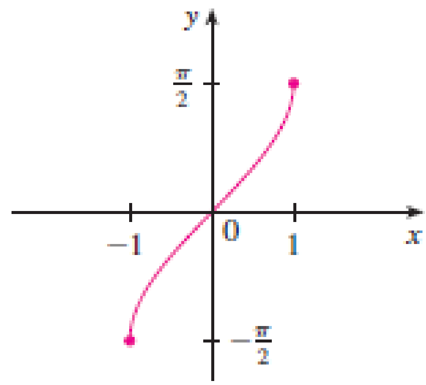


រូបភាពទី19

ការបំបាត់សមីការចំពោះអនុគមន៍ច្រាស ក្នុងករណីនេះ

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin^{-1}(\sin)=x \text{ ចំពោះ } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ &\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x \text{ ចំពោះ } -1\le x\le 1\end{aligned}}$$

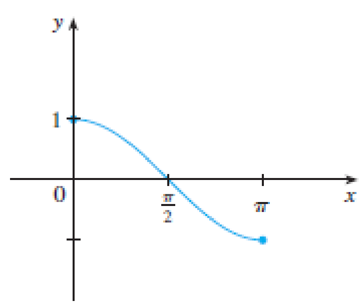
អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\sin$ គឺ $\sin^{-1}$ មានដែនកំណត់ $[-1,1]$ ហើយរូបភាព $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ហើយក្រាបរបស់វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី20 គឺទទួលបានពីកម្រិតនៃអនុគមន៍ $\sin$ (រូបភាពទី18) ដោយឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

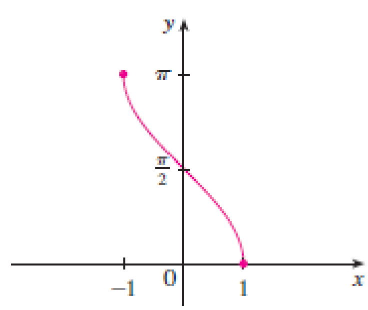


រូបភាពទី20

អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ cos គឺត្រូវបានដោះស្រាយស្រដៀងគ្នា ។ កម្រិតនៃអនុគមន៍ cos $f(x)=\cos x, 0\le x\le \pi$ គឺជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ(មើលរូបភាពទី21) ហើយដូច្នេះវាជាអនុគមន៍ច្រាសមួយកំណត់ដោយ $\cos^{-1}$ ឬក៏ arccos ។

. $\boxed{\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos y = x \text{ ហើយ } 0\le y\le \pi}$





រូបភាពទី21 $y=\cos x, 0\le x\le \pi$ រូបភាពទី22 $y=\cos^{-1}x=\arccos x$

ការបំបាត់សមីការគឺ

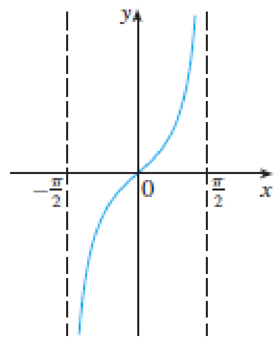
$\cos^{-1}(\cos x)=x$ ចំពោះ $0\le x\le \pi$

$\cos(\cos^{-1}x)=x$ ចំពោះ $-1\le x\le 1$

អនុគមន៍ច្រាសនៃ $\cos$ គឺ $\cos^{-1}$ មានដែនកំណត់ $[-1,1]$ ហើយមានរូបភាព $[0,\pi]$ ។ ក្រាបរបស់វាបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី22 ។

អនុគមន៍ $\tan$ អាចត្រូវបានបង្កើតជាអនុគមន៍មួយទល់មួយដោយដាក់កម្រិតវាក្នុងចន្លោះ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ។ ដូចនេះ អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\tan$ ត្រូវបានកំណត់ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=\tan x, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ។ (មើលរូបភាពទី23) វាត្រូវបានកំណត់ដោយ $\tan^{-1}$ ឬក៏ $\arctan$ ។

$$\boxed{\tan^{-1}x=y \Leftrightarrow \tan y=x \text{ ហើយ } -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}}$$



រូបភាពទី23 $y=\tan x, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

ឧទាហរណ៍ទី13 : រកកន្សោមងាយនៃ $\cos\left(\tan^{-1}x\right)$ ។

ដំណោះស្រាយទី1

តាង $y=\tan^{-1}x$ នោះ $\tan y=x$ ហើយ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ។ យើងចង់រក $\cos y$ ក៏ប៉ុន្តែពី $\tan y$ ត្រូវបានស្គាល់ វាងាយស្រួលដើម្បីរក $\sec y$ ដំបូង :

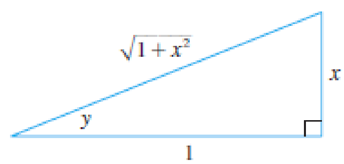
$$\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$$

$\sec y=\sqrt{1+x^2}$ (ពី $\sec y>0$ ចំពោះ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$)

ដូចនេះ $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\cos y=\frac{1}{\sec y}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

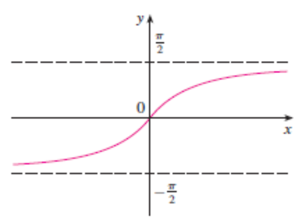
ដំណោះស្រាយទី2

ជំនួសឲ្យការប្រើអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដូចក្នុងដំណោះស្រាយទី1 ។ វាប្រហែលងាយស្រួលជាងដើម្បីប្រើក្រាប ។ បើ $y=\tan^{-1}x$ នោះ $\tan y=x$ ហើយយើងអាចអានពីក្នុងរូបភាពទី24 (ដែលបង្ហាញក្នុងករណី $y>0$) ដែល $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



រូបភាពទី24

អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\tan$ គឺ $\tan^{-1}=\arctan$ មានដែនកំណត់□ ហើយរូបភាព$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។ ក្រាបរបស់វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី25 ។



រូបភាពទី25 $y=\tan^{-1}x=\arctan x$

យើងដឹងថាបន្ទាត់ $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ គឺអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបនៃអនុគមន៍ $\tan$ ។ ពីក្រាបនៃ $\tan^{-1}$ ទទួលបានដោយការឆ្លុះក្រាបនៃកម្រិតអនុគមន៍ $\tan$ ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ វាជាបម្រាប់ដែលបន្ទាត់ $y=\dfrac{\pi}{2}$ និង $-\dfrac{\pi}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $y=\tan^{-1}$ ។

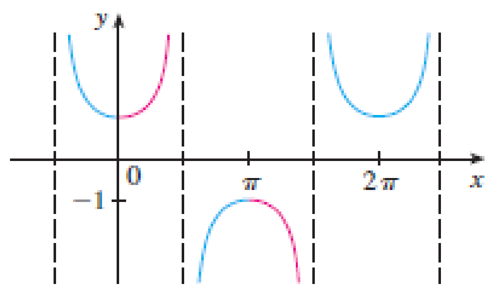
នៅសល់អនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមិនត្រូវបានប្រើជាញឹកញាប់ហើយត្រូវបានសង្ខេបនៅទីនេះ ៗ

$y=\csc^{-1}x\left(|x|\geq 1\right)\Leftrightarrow \csc y=x$ ហើយ $y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

$y=\sec^{-1}(|x|\geq 1)\Leftrightarrow \sec y = x$ ហើយ $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

$y=\cot^{-1}x(x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow \cot y = x$ ហើយ $y\in(0,\pi)$

ការជ្រើសរើសចន្លោះចំពោះ y ក្នុងនិយមន័យនៃ $\csc^{-1}$ និង $\sec^{-1}$ គឺមិនមានការយល់ស្របជាសកលទេ ។ ជាឧទាហរណ៍ អ្នកនិពន្ធមួយចំនួនប្រើ $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ក្នុងនិយមន័យនៃ $\sec^{-1}$ ។ (អ្នកអាចមើលពីក្រាបនៃអនុគមន៍ $\sec$ ក្នុងរូបភាពទី26 ដែលជាជម្រើសហើយមួយនៅក្នុងរូបមន្តខាងលើនឹងធ្វើការ ។



រូបភាពទី26 $y=\sec x$

លំហាត់

1. ក. តើអនុគមន៍មួយទល់មួយជាអ្វី?

 ខ. តើអ្នកអាចប្រាប់បានដូចម្ដេចថាអនុគមន៍មួយជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ?

2. ក. ឧបមាថា f គឺជាអនុគមន៍មួយទល់មួយជាមួយដែនកំណត់ A ហើយនឹងរូបភាព B ។ តើគេអាចកំណត់អនុគមន៍ច្រាស f^{-1} យ៉ាងដូចម្ដេច?

 ខ. បើអ្នកត្រូវបានផ្ដល់ងឲ្យនូវរូបមន្តចំពោះ f តើអ្នកអាចស្វែងរករូបមន្តចំពោះ f^{-1} យ៉ាងដូចម្ដេច?

 គ. ប្រសិនបើគេផ្ដល់ឲ្យក្រាបនៃ f តើអ្នករកក្រាបនៃអនុគមន៍ f^{-1} យ៉ាងដូចម្ដេច?

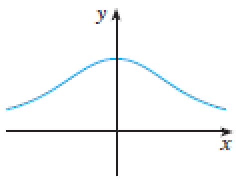
3-14. អនុគមន៍មួយត្រូវបានផ្ដល់ឲ្យដោយតារាងនៃតម្លៃលេខខាងក្រោម ក្រាប រូបមន្ត ឬក៏ការពណ៌នាverbal ។ កំណត់ថាវាជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

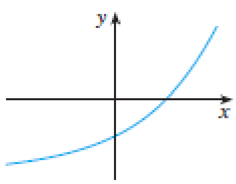
3.

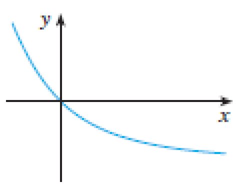
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

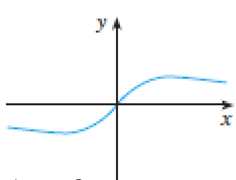
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	1.9	2.8	3.5	3.1	2.9

5. 

6. 

7. 

8. 

9. $f(x)=x^2-2x$

10. $f(x)=10-3x$

11. $g(x)=\dfrac{1}{x}$

12. $g(x)=\cos x$

13. $f(t)$ គឺជាកម្ពស់នៃបាល់មួយរយៈពេល t វិនាទីបន្ទាប់ពីទាត់ ។

14. $f(t)$ គឺជាកម្ពស់របស់អ្នកនៅអាយុ t ។

15. សន្មតថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ

ក. បើ $f(6)=17$ តើ $f^{-1}(17)$ ស្មើប៉ុន្មាន?

ខ. បើ $f^{-1}(3)=2$ តើ $f(2)$ ស្មើប៉ុន្មាន?

16. បើ $f(x)=x^5+x^3+x$ ។ រក $f^{-1}(3)$ និង $f\left(f^{-1}(2)\right)$ ។

17. បើ $g(x)=3+x+e^x$ ។ រក $g^{-1}(-4)$ ។

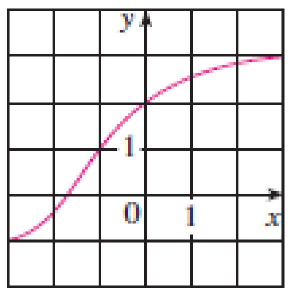
18. ក្រាបនៃ f ត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ ។

ក. ហេតុអ្វីបានជា f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ?

ខ. តើដែនកំណត់និងរូបភាពនៃ f^{-1} ស្មើប៉ុន្មាន?

គ. តើតម្លៃនៃ f^{-1} ស្មើប៉ុន្មាន?

ឃ. ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f^{-1}(0)$ ។



19. អនុគមន៍ $C=\frac{5}{9}(F-32)$ ។ ដែល $F\geq -459.67$ ចូរកំណត់កន្សោមនៃសីតុណ្ហភាពសែលស៊ីុស C ជាអនុគមន៍នៃមាត្រដ្ឋានផារិនហៃ F ។ រកអនុគមន៍ច្រាសហើយនឹងinterpretវា ។ តើដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ច្រាសស្មើប៉ុន្មាន?

20. ក្នុងទ្រឹស្តីទំនាក់ទំនងម៉ាសនៃភាគល្អិតមួយជាមួយនឹងល្បឿន v គឺ $m=f(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

ដែល m_0 គឺជាម៉ាសដែលនៅសល់នៃភាគល្អិតហើយ c ជាល្បឿនពន្លឺក្នុងសុញ្ញកាស ។ រកអនុគមន៍ច្រាសនៃ f ហើយពន្យល់ពីអត្ថន័យរបស់វា ។

21-26. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

21. $f(x)=1+\sqrt{2+3x}$ 22. $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x+3}$

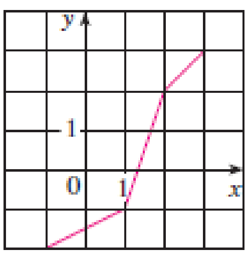
23. $f(x)=e^{2x-1}$ 24. $y=x^2-x, x\geq\dfrac{1}{2}$

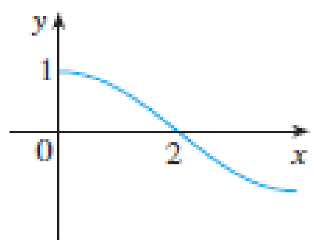
25. $y=\ln(x+3)$ 26. $y=\dfrac{e^x}{1+2e^x}$

27-28. រកអនុគមន៍អំព្លីស៊ីតចំពោះ f^{-1} ហើយប្រើវាដើម្បីគូសក្រាប f^{-1}, f ហើយបន្ទាត់ $y=x$ នៅលើអេក្រង់ ។ ចូរពិនិត្យមើលការងាររបស់អ្នក មើលក្រាបនៃ f និង f^{-1} ដែលឆ្លុះធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ ។

27. $f(x)=x^4+1, x\geq 0$ 28. $f(x)=2-e^x$

29-30. ប្រើក្រាបនៃ f ដើម្បីគូសក្រាបនៃ f^{-1} ។

29.


30.


31. តាង $f(x)=\sqrt{1-x^2}, 0\leq x\leq 1$ ។

ក. រក f^{-1} ។ តើវាទាក់ទងទៅនឹង f យ៉ាងដូចម្តេច?

ខ. បញ្ជាក់ក្រាបនៃ f ហើយពន្យល់ចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងផ្នែក(ក) ។

32. តាង $g(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ ។

ក. រក g^{-1} ។ តើវាទាក់ទងទៅនឹង g យ៉ាងដូចម្តេច?

ខ. បញ្ជាក់ក្រាបនៃ g ហើយពន្យល់ចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងផ្នែក(ក) ។

33. ក. តើអនុគមន៍លោការីត $y=\log_a x$ ត្រូវបានកំណត់យ៉ាងដូចម្តេច?

ខ. តើដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះស្មើប៉ុន្មាន?

គ. តើរូបភាពនៃអនុគមន៍នេះស្មើប៉ុន្មាន ?

ឃ. ចូរគូសGeneral Shapeនៃក្រាបរបស់អនុគមន៍ $y=\log_a x, a>1$ ។

34. ក. តើអ្វីជាអនុគមន៍លោការីតធម្មជាតិ ?

ខ. តើអ្វីជាអនុគមន៍លោការីតងាយ ?

គ. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីតធម្មជាតិ ហើយអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាមួយការកំណត់អាប់ស៊ីសងាយមួយ ។

35-38. រកតម្លៃប្រាកដនៃកន្សោមនីមួយៗ

35.ក. $\log_5 125$ ខ. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36.ក. $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ ខ. $\log_{10}\sqrt{10}$

37.ក. $\log_2 6-\log_2 15+\log_2 20$

ខ. $\log_3 100-\log_3 18-\log_3 50$

38. ក. $e^{-2\ln 5}$ ខ. $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39-41. បង្ហាញថាកន្សោមខាងក្រោមជាលោការីតទោល ។

39. $\ln 5+5\ln 3$

40. $\ln(a+b)+\ln(a-b)-2\ln c$

41. $\frac{1}{3}\ln(x+2)^3+\frac{1}{2}\left[\ln x-\ln\left(x^2+3x+2\right)^2\right]$

42. ប្រើរូបមន្តប្តូរគោលដើម្បីរកតម្លៃលោការីតនីមួយៗយកតម្លៃទសភាគ 6 ខ្ទង់ ។

ក. $\log_{12} 10$ ខ. $\log_2 8.4$

43-44. ប្រើរូបមន្តប្តូរគោលដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍នៅលើអេក្រង់ងាយមួយ ។ តើក្រាបទាំងនេះទាក់ទងគ្នាយ៉ាងដូចម្តេច?

43. $y=\log_{1.5}x, y=\ln x, y=\log_{10}x, y=\log_{50}x$

44. $y=\ln x, y=\log_{10}x, y=e^{x}, y=10^{x}$

45. ឧបមាថាក្រាបនៃ $y=\log_2 x$ ត្រូវបានគូសក្នុងប្លង់កូអរដោនេដែលឯកតាជាអ៊ិញ ។ តើមានប៉ុន្មាន $miles$ ទៅស្តាំពីគល់តម្រុយដែលយើងត្រូវផ្លាស់ទីមុនពេលកម្ពស់នៃខ្សែកោងឈានដល់ $3ft$?

46. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ $f(x)=x^{0.1}$ និង $g(x)=\ln x$ ដោយក្រាបទាំងពីរនៃ f និង g ក្នុងរូបចតុកោណកែង ។ តើចុងក្រាបនៃ f ហួសក្រាបនៃ g នៅពេលណា?

47-48. បង្កើតផ្ទត់នៃក្នុងការគូសក្រាបនៃអនុគមន៍នីមួយៗ ។ កុំប្រើម៉ាស៊ីន គ្រាន់តែប្រើក្រាបដែលបានផ្តល់ឲ្យនៅក្នុងរូបភាពតី12 និង13 ហើយប្រសិនបើវាសំខាន់មើលការផ្លាស់ប្តូរនៃចំណុច1.3 ។

47. ក. $y=\log_{10}(x+5)$ ខ. $y=-\ln x$

48.ក. $y=\ln(-x)$ ខ. $y=\ln|x|$

49-50.ក. តើដែនកំណត់និងរូបភាពនៃ f ស្មើប៉ុន្មាន?

ខ. តើ x_0 នៃក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ស្មើប៉ុន្មាន?

គ. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

49. $f(x)=\ln x+2$

50. $f(x)=\ln(x-1)-1$

51-54. ដោះស្រាយសមីការនីមួយៗ

51.ក. $e^{7-4x}=6$ ខ. $\ln(3x-10)=2$

52.ក. $\ln(x^2-1)=3$ ខ. $e^{2x}-3e^{x}+2=0$

53.ក. $2^{x-5}=3$ ខ. $\ln x+\ln(x-1)=1$

54.ក. $\ln(\ln x)=1$ ខ. $e^{ax}=Ce^{bx}, a\neq b$

55-56. ដោះស្រាយវិសមីការនីមួយៗ

55.ក. $\ln x<0$ ខ. $e^{x}>5$

56.ក. $1<e^{3x-1}<2$ ខ. $1-2\ln x<3$

57.ក. រកដែនកំណត់នៃ $f(x)=\ln(e^{x}-3)$

ខ. រក f^{-1} និងដែនកំណត់របស់វា ។

58.ក. តើតម្លៃនៃ $e^{\ln 300}$ និង $\ln(e^{300})$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

ខ. ប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខរបស់អ្នកដើម្បីរកតម្លៃ e^{300} និង $\ln(e^{300})$ ។ តើអ្នកសម្គាល់អ្វី? តើអ្នកអាចពន្យល់ហេតុអ្វីបានជាម៉ាស៊ីនគិតលេខមានបញ្ហា ?

59. គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x^{3}+x^{2}+x+1}$ ហើយពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជាវាជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។ បន្ទាប់មកប្រើប្រព័ន្ធពីជគណិតក្នុងកុំព្យូទ័រដើម្បីរកអនុគមន៍អំព្លីស៊ីតចំពោះ $f^{-1}(x)$ ។ (ប្រព័ន្ធពីជគណិតក្នុងកុំព្យូទ័ររបស់អ្នកនឹងបង្កើតកន្សោមបីដែលអាចទៅរួច ។ ពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជាពីរក្នុងចំណោមពួកវាមិនពាក់ព័ន្ធក្នុងបរិបទនេះ) ។

60.ក. បើ $g(x)=x^{6}+x^{4}, x\geq 0$ ប្រើប្រព័ន្ធពីជគណិតក្នុងកុំព្យូទ័រដើម្បីរកកន្សោមមួយចំពោះ $g^{-1}(x)$ ។

ខ. ប្រើកន្សោមក្នុងផ្នែក(ក) ដើម្បីគូសក្រាបនៃ $y=g(x), y=x$ និង $y=g^{-1}(x)$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ។

61. ប្រសិនបើចំនួនបាក់តេរីចាប់ពី 100 បាក់តេរីហើយកើនទ្វេដងរៀងរាល់ 3 ម៉ោង នោះចំនួននៃបាក់តេរីបន្ទាប់ពី t ម៉ោងគឺ $n=f(t)=100\cdot 2^{\frac{t}{3}}$ ។ (មើលលំហាត់ទី29ចំណុចទី1.5)

ក. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍នេះ ហើយពន្យល់ពីអត្ថន័យរបស់វា ។

ខ. តើនៅពេលណាដែលចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ $50,000$?

62. នៅពេលភ្លើងកាមេរ៉ាបិទ ភ្លាមៗនោះថ្មបានចាប់ផ្តើមសាកកុងទ័រភ្លើងម្តងទៀត ដែលផ្ទុកអគ្គិសនីត្រូវបានផ្តល់ដោយ $Q(t)=Q_0\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)$

Q_0 ជាតម្លៃថាមពលអគ្គិសនីធំបំផុត ហើយ t គិតជាវិនាទី ។

ក. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍នេះហើយពន្យល់ពីអត្ថន័យរបស់វា ។

ខ. តើប្រើពេលប៉ុន្មានដើម្បីសាកថ្មកុងទ័រភ្លើងឲ្យបាន 90% បើ $a=2$?

63-68. រកតម្លៃពិតប្រាកដនៃកន្សោមនីមួយៗ

63.ក. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ខ. $\cos^{-1}(-1)$

64.ក. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ខ. $\sec^{-1}2$

65.ក. $\arctan 1$ ខ. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

66.ក. $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ ខ. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

67.ក. $\tan(\arctan 10)$ ខ. $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$

68.ក. $\tan\left(\sec^{-1}4\right)$ ខ. $\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

69. បង្ហាញថា $\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\sqrt{1-x^2}$

70-72. រកកន្សោមងាយ

70. $\tan\left(\sin^{-1}x\right)$ 71. $\sin\left(\tan^{-1}x\right)$

72. $\cos\left(2\tan^{-1}x\right)$

73-74. គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលបានផ្តល់ឲ្យនៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា ។ តើក្រាបទាំងនេះទាក់ទងគ្នាយ៉ាងដូចម្តេច?

73. $y=\sin x, \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; y=\sin^{-1} x; y=x$

74. $y=\tan x, \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; y=\tan^{-1} x; y=x$

75. រកដែនកំណត់ និងរូបភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)=\sin^{-1}(3x+1)$

76. ក. គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin\left(\sin^{-1} x\right)$ ហើយពន្យល់ពីការកើតឡើងនៃក្រាប ។

ខ. គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $g(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ ។ តើអ្នកពន្យល់ពីការកើតឡើងនៃក្រាបនេះយ៉ាងដូចម្តេច?

77. ក. បើយើងរំកិលខ្សែកោងទៅឆ្វេង តើមានអ្វីកើតឡើងដើម្បីឲ្យក្រាបឆ្លុះជៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$? ក្នុងគោលការណ៍ធរណីមត្រ រកកន្សោមចំពោះអនុគមន៍ច្រាសនៃ $g(x)=f(x+c)$ ដែល f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

ខ. រកកន្សោមមួយចំពោះអនុគមន៍ច្រាសនៃ $h(x)=f(cx)$ ដែល $c \neq 0$ ។

លំហាត់

1.តាង f ជាអនុគមន៍ក្រាបត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ ។

ក. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f(2)$ ។

ខ. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃ x ដែល $f(x)=3$ ។

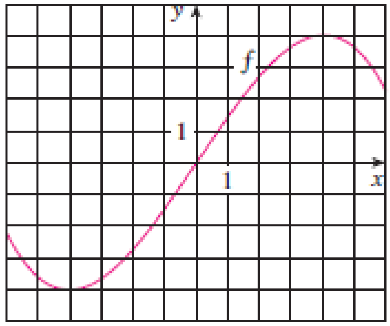
គ. រកដែនកំណត់នៃ f ។

ឃ. រករូបភាពនៃ f ។

ង. តើ f កើននៅចន្លោះណា?

ច. តើ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយឬទេ? ចូរពន្យល់

ឆ. តើ f ជាអនុគមន៍គូរ សេស ឬក៏មិនសេស ឬមិនគូរ ? ចូរពន្យល់



2.ក្រាបនៃ g ត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ ។

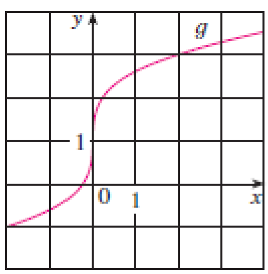
ក. រកតម្លៃនៃ $g(2)$ ។

ខ. ហេតុអ្វីបានជា g ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ?

គ. ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $g^{-1}(2)$ ។

ឃ. ចូរប៉ាន់ស្មានដែនកំណត់នៃ g^{-1} ។

ង. ចូរគូសក្រាបនៃ g^{-1} ។



3.បើ $f(x)=x^2-2x+3$ ។ រកតម្លៃនៃអនុគមន៍ផ្សេងៗទៀត $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

4.ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលជាទិន្នផលនៃដំណាំជាអនុគមន៍នៃបរិមាណជីដែលបានប្រើប្រាស់ ។

5-8. រកដែនកំណត់និងរូបភាពនៃអនុគមន៍ ។ សរសេរចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងចន្លោះសម្គាល់ ។

5. $f(x)=\dfrac{2}{(3x-1)}$ 6. $g(x)=\sqrt{16-x^4}$

7. $h(x)=\ln(x+6)$ 8. $F(t)=3+\cos 2t$

9.ឧបមាថាក្រាបនៃ f ត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ ។ ពណ៌នាពីវិធីនៃការគូសក្រាបតាមរយៈបម្រាប់អនុគមន៍ដែលអាចទទួលបានពីក្រាបនៃ f ។

ក. $y=f(x)+8$ ខ. $y=f(x+8)$

គ. $y=1+2f(x)$ ឃ. $y=f(x-2)-2$

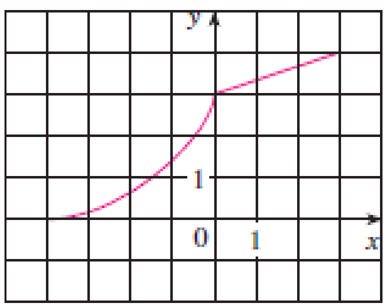
ង. $y=-f(x)$ ច. $y=f^{-1}(x)$

10.ក្រាបនៃអនុគមន៍ត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ ។ ចូរគូសក្រាបនៃបម្រាប់អនុគមន៍ខាងក្រោម ។

ក. $y=f(x-8)$ ខ. $y=-f(x)$

គ. $y=2-f(x)$ ឃ. $y=\frac{1}{2}f(x)-1$

ង. $y=f^{-1}(x)$ ច. $y=f^{-1}(x+3)$



11-16. ប្រើការផ្លាស់ប្តូរដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ ។

11. $y=-\sin 2x$ 12. $y=3\ln(x-2)$

13. $y=\frac{1}{2}(1+e^{x})$ 14. $y=2-\sqrt{x}$

15. $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 16. $f(x)=\begin{cases}-x & \text{បើ } x<0 \\ e^{x}-1 & \text{បើ } x\geq 0\end{cases}$

17.ចូរកំណត់ថា f ជាអនុគមន៍គូរ សេស ឬក៏មិនមែនជាអនុគមន៍គូរឬមិនមែនជាអនុគមន៍សេស ។

ក. $f(x)=2x^{5}-3x^{2}+2$

ខ. $f(x)=x^3-x^7$

គ. $f(x)=e^{-x^2}$

ឃ. $f(x)=1+\sin x$

18.រកកន្សោមមួយចំពោះអនុគមន៍ដែលក្រាបមានកន្លះមន្ទាត់ពីចំណុច $(-2,2)$ ទៅចំណុច $(-1,0)$ ជាមួយគ្នានឹងពាក់កណ្តាលរង្វង់ ផ្ចិត និងកាំ 1 ។

19.បើ $f(x)=\ln x$ និង $g(x)=x^2-9$ ។ រកអនុគមន៍ ក. fog ខ. gof គ. fof ឃ. gog ហើយនឹងដែនកំណត់របស់វា ។

20.បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ជាសមាសភាពនៃអនុគមន៍បី ។

21.អាយុសង្ឃឹមរស់ត្រូវបានពង្រឹងយ៉ាងខ្លាំងនៅក្នុងសតវត្សទី 20 ។ តារាងខាងក្រោមផ្តល់ជូននូវអាយុសង្ឃឹមរស់នៅឆ្នាំកំណើតរបស់បុរសដែលកើតនៅក្នុងសហរដ្ឋអាមេរិច ។ ប្រើការគូសខ្សែដើម្បីជ្រើសរើសប្រភេទនៃគម្រូសមស្របមួយ ។ ប្រើគម្រូរបស់អ្នកដើម្បីទស្សទាយពីអាយុសង្ឃឹមរស់របស់បុរសម្នាក់កើតនៅក្នុងឆ្នាំ 2010 ។

Birth year	Life expectancy	Birth year	Life expectancy
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

22.ឧបករណ៍ផលិតតូចមួយត្រូវបានរកឃើញថាវាចំណាយ $\$9000$ ដើម្បីផលិតឡចំហាយចំនួន 1000 ក្នុងមួយសប្តាហ៍ហើយ $\$12,000$ ដើម្បីផលិតឡចំហាយ 1500 ក្នុងមួយសប្តាហ៍ ។

ក. រកអនុគមន៍ចំណាយជាអនុគមន៍នៃចំនួនឡចំហាយដែលបានផលិត សន្មតថាវាជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ។ បន្ទាប់មកគូសក្រាប ។

ខ. តើមេគុណប្រាប់ទិសនៃក្រាបស្មើប៉ុន្មាន ? តើវាតាងឲ្យអ្វី ?

គ. តើ y_0 នៃក្រាបស្មើប៉ុន្មាន ហើយវាតាងឲ្យអ្វី ?

23.បើ $f(x)=2x+\ln x$ ។ រក $f^{-1}(2)$

24.រកអនុគមន៍ច្រាសនៃ $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$

25.រកតម្លៃពិតប្រាកដនៃកន្សោមនីមួយៗ

ក. $e^{2\ln 3}$ ខ. $\log_{10}25+\log_{10}4$

គ. $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$ ឃ. $\sin\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)\right)$

26.ដោះស្រាយសមីការ

ក. $e^{x}=5$ ខ. $\ln x=2$

គ. $e^{e^{x}}=2$ ឃ. $\tan^{-1}x=1$

27.ចំនួននៃប្រភេទសត្វជាក់លាក់មួយក្នុងបរិស្ថានត្រូវបានកំណត់មួយជាមួយចំនួន100 ដំបូង ហើយនឹងសមត្ថភាពផ្ទុក1000 គឺ $P(t)\dfrac{100,000}{100+900e^{-t}}$ ដែល t ជារយៈពេលគិតជាឆ្នាំ ។

ក. ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍នេះ ហើយប៉ាន់ស្មានថាតើគេត្រូវប្រើរយៈពេលប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យចំនួនកើនដល់ 900 ?

ខ. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍នេះហើយពន្យល់ពីអត្ថន័យរបស់វា ។

គ. ប្រើអនុគមន៍ច្រាសដើម្បីរករយៈពេលដើម្បីឲ្យចំនួនឈានដល់ 900 ។ ប្រៀបជាមួយលទ្ធផលនសចំណុច(ក) ។

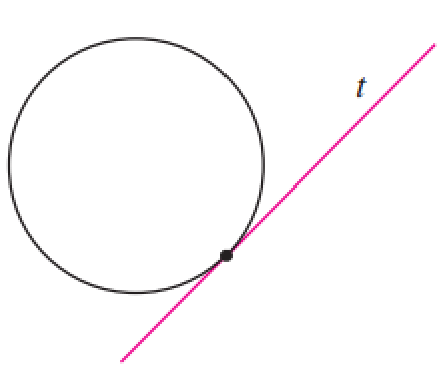
28.ចូរគូសក្រាបនៃអនុគមន៍បី $y=x^{a}, y=a^{x}$ និង $y=\log_{a}x$ នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នាចំពោះពីរ ឬបីតម្លៃនៃ $a>1$ ។ ចំពោះតម្លៃ x ធំ តើអនុគមន៍មួយណាមានតម្លៃធំជាង ហើយតើអនុគមន៍មួយណាមានតម្លៃតូចជាង ?

មេរៀនទី២៖ លីមីត និង ដេរីវេ

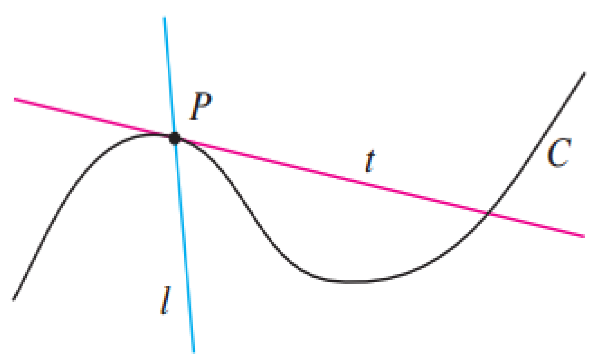
២.១. តង់សង់ និង ល្បឿន

សេចក្ដីផ្ដើមពីតង់សង់

ពាក្យតង់សង់បានមកពីពាក្យឡាតាំង tangens ដែលមានន័យថា" ប៉ះ" ។ ដូច្នេះ តង់សង់នៃខ្សែកោង (Tangent of Curve)គឺជាបន្ទាត់ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង។ យើងអាចនិយាយបានម៉្យាងទៀតថា បន្ទាត់តង់សង់ជាទិសដៅខ្សែកោងត្រង់ចំណុចដែលមានទំនាក់ទំនងគ្នា។ តើគំនិតនេះអាចត្រូវបានបញ្ជាក់យ៉ាងដូចម្ដេច? សម្រាប់រង្វង់មួយយើងអាចធ្វើតាមវិធីអឺគ្លីត(Euclid) ហើយនិយាយបានថាតង់សង់ (Tangent) គឺជាបន្ទាត់ដែលប្រសព្វរង្វង់តែមួយចំណុចក្នុងរូបភាពទី (ក) ។ រូបភាពទី (ខ) បានបង្ហាញពីរបន្ទាត់ពីរ l និង t ដែលកាត់ត្រង់ចំណុច P នៅលើខ្សែកោង C ។ បន្ទាត់ l កាត់ខ្សែកោង C តែម្ដង ប៉ុន្តែវាច្បាស់ថាវាមិនកាត់ខ្សែកោង C តែបន្ទាត់ t ដូចទៅនឹងតង់សង់ដែរ ប៉ុន្តែវាប៉ះលើខ្សែកោង និងកាត់ខ្សែកោង។



រូបទី(ក)

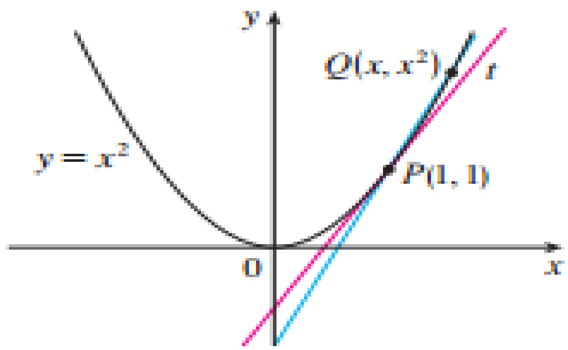


រូបទី(ខ)

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ត្រង់ចំណុច $p(1,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ យើងនឹងអាចរកឃើញសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់នៃបន្ទាត់ t នៅពេលដែលយើងស្គាល់មេគុណប្រាប់ទិស m របស់វា។ អ្វីដែលលំបាកគឺថាយើងដឹងតែចំណុច P មួយប៉ុណ្ណោះនៅលើបន្ទាត់ t ប៉ុន្តែយើងត្រូវការពីរចំណុចដើម្បីគណនារកមេគុំប្រាប់ទិសរបស់វា។ប៉ុន្តែយើងសង្កេតថាយើងអាចគណនា

តម្លៃប៉ាន់ស្មាននៃចំណុច m ដោយធ្វើការជ្រើសរើសចំណុចក្បែរៗ $Q(x,x^2)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល (ដូចក្នុងរូបភាពទី ២) និងធ្វើការគណនារកមេគុណប្រាប់ទិស m_{PQ} នៃបន្ទាត់ប៉ះ PQ ។



យក $x \neq 1$ ដែល $Q \neq P$ គេបាន៖

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ឧទាហរណ៍យើងមានចំណុច $Q(1.5, 2.5)$ គេបាន៖ $m_{PQ} = \frac{2.25-1}{1.5-1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$

តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីតម្លៃ m_{PQ} ជាច្រើនដែលតម្លៃ x ខិតជិត 1 ។ តម្លៃ Q ខិតទៅរក P ហើយ x ខិតជិត1 ដែលមានក្នុងតារាង ហើយតម្លៃ m_{PQ} ខិតជិត 2 ។

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

នេះបង្ហាញថាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ t គឺ $m = 2$ ។ យើងនិយាយបានថាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ គឺជាលីមីតនៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះដែលកំណត់សរសេរដោយ៖

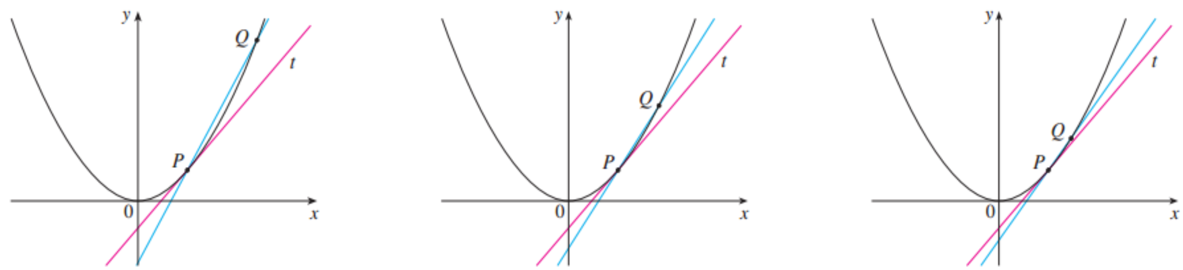
$\lim\limits_{Q \to P} m_{QP} = m$ នោះ $\lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

សន្មតថាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់គឺពិតជា 2 យើងប្រើមេគុណប្រាប់ទិសនៃសមីការបន្ទាត់ ដើម្បីសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់តាមចំណុច (1,1) គេបាន៖

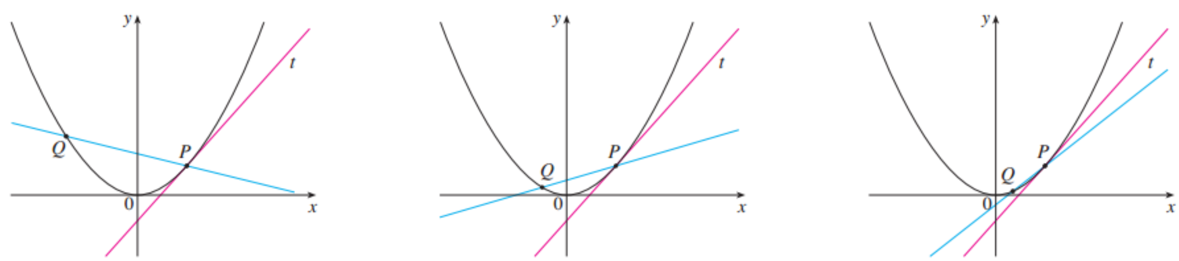
t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

$y - 1 = 2(x - 1)$ ឬ $y = 2x - 1$

រូបភាពទី ៣ បង្ហាញពីដំណើរការកំណត់ដែលកើតឡើងនៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះ។ Q ខិតជិត P នៅតាមបណ្តោយនៃប៉ារ៉ាបូល។ បន្ទាត់ប៉ះដែលត្រួតស៊ីគ្នារំកិល P ហើយខិតជិតបន្ទាត់តង់សង់ t ។



Q ខិតជិត P ពីខាងស្តាំ



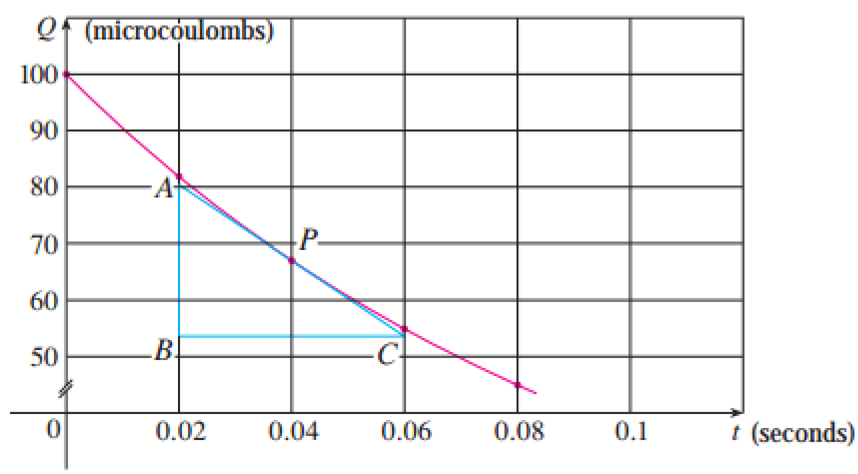
Q ខិតជិត P ពីខាងឆ្វេង

(រូបទី៣)

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ក្រុមពន្លឺនៅលើកាមេរ៉ាដែលដំណើរការដោយការរក្សាទុកបន្ទុកនៅលើកាប៉ាស៊ីតេហើយបញ្ចេញវាភ្លាមៗនៅពេលដែលពន្លឺបានបិទ។ ទិន្នន័យនៅក្នុងតារាងពិពណ៌នាអំពីបន្ទុក Q ដែលនៅសល់លើកាប៉ាស៊ីតេ (គិតជាមីក្រូកូឡំ) រយៈពេល t (គិតជាវិនាទី គិតចាប់ពីពន្លឺកាមេរ៉ាបិទ)។ ប្រើទិន្នន័យដើម្បីគូរក្រាហ្វនៃអនុគមន៍នេះនិងប៉ាន់ស្មានតម្លៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ត្រង់ចំណុចដែល $t = 0.04$។ **សំគាល់៖** មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ដែលតាងឱ្យចរន្តអគ្គិសនីដែលហូរចេញពីកុងទ័រទៅអំពូល(គិតជាមីក្រូអំពែ)។

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

ដំណោះស្រាយ៖ នៅក្នុងរូបភាពទី 4 យើងយកទិន្នន័យដែលបានផ្តល់ឲ្យហើយប្រើវាដើម្បីគូសខ្សែកោងដែលជាក្រាហ្វនៃអនុគមន៍។



(រូបទី៤)

យើងយកចំណុច $P(0.04,67.03)$ និង $R(0.00,100.00)$ នៅលើក្រាហ្វ។ យើងរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ PR គឺៈ

$$m_{PR}=\frac{100.00-67.03}{0.00-0.04}=-824.25$$

តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីលទ្ធផលតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ផ្សេងទៀត។

តាមតារាងខាងលើនេះយើងរំពឹងថាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ ដែល $t=0.04$ គឺស្ថិតនៅចន្លោះរវាង -742 ទៅ -607.5 ។ តាមពិតតម្លៃមធ្យមមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរគឺៈ

$$\frac{1}{2}(-742-607.5)=-674.75$$

ដូច្នេះតាមវិធីនេះយើងប៉ាន់ស្មានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់គឺតង់សង់ដល់ -675 ។

វិធីសាផ្សេងមួយទៀតគឺត្រូវគូសតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលទៅនឹងបន្ទាត់តង់ហ្សង់ត្រង់ P និងវាស់មុំត្រីកោណ ABC ដូចក្នុងរូបភាពទី ៤ ។ នេះគឺផ្តល់នូវការប៉ាន់ស្មានតម្លៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់តាមរូបមន្តៈ

$$-\frac{|AB|}{|BC|}\approx-\frac{80.4-53.6}{0.06-0.02}=-670$$

សេចក្តីផ្តើមពីល្បឿន

ប្រសិនបើអ្នកមើលឧបករណ៍វាស់ល្បឿនរបស់រថយន្តនៅពេលអ្នកធ្វើចរាចរណ៍ក្នុងទីក្រុងអ្នកឃើញថាទ្រនិចរបស់វាមិននៅស្ងៀមទេ មានន័យថាល្បឿនរបស់រថយន្តមិនថេរទេ។ យើងសន្មត់ ពីការមើលឧបករណ៍វាស់ល្បឿនថារថយន្តមានល្បឿនច្បាស់លាស់ក្នុងពេលនីមួយៗ ប៉ុន្តែតើល្បឿនខណៈ ត្រូវបានកំណត់យ៉ាងដូចម្តេច? សូមធ្វើការស៊ើបអង្កេតឧទាហរណ៍ពេលដែលបាល់ធ្លាក់ចុះ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ៈ ឧបមាថាគ្រាប់បាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីលើកន្លែងសង្កេតខាងលើនៃប៉មស៊ីអិន។ ក្នុងទីក្រុងតូរ៉ុនតូដែលមានកំពស់ $450m$ ពីផ្ទៃដី។ រកល្បឿនរបស់បាល់បន្ទាប់ពីប្រើពេលអស់ 5 វិនាទី។

ដំណោះស្រាយ៖ តាមរយៈការពិសោធន៍ដែលបានអនុវត្តកាលពី ៤ សតវត្សរ៍មុន លោកហ្គាលីលេបានរកឃើញថា ចម្ងាយដែលបានធ្លាក់ចុះសមាមាត្រទៅនឹងការេនៃពេលដែលបានធ្លាក់ចុះ។ ប្រសិនបើចម្ងាយធ្លាក់ចុះ $s(t)$ គិតជា m បន្ទាប់ពីរយៈពេល t គិតជា s តាមច្បាប់របស់លោកហ្គាលីលេបានកំណត់ដោយសមីការ៖ $s(t)=4.9t^2$ ផលវិបាកក្នុងការស្វែងរកល្បឿនបន្ទាប់ពី 5 វិនាទីគឺថាយើងកំពុងដោះស្រាយជាមួយខណៈពេកតែមួយ $(t=5)$ ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយយើងអាចប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលបានដោយគណនាល្បឿនមធ្យមក្នុងចន្លោះពេលវិនាទីទី១០ ពី $t=5$ ទៅ $t=5.1$ គេបាន៖

$$\text{ល្បឿនមធ្យម}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$=\frac{s(5.1)-s(5)}{0.1}$$
$$=\frac{4.9(5.1t)^2-4.9(5t)^2}{0.1}=49.49m/s$$

តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីលទ្ធផលនៃការគណនាតម្លៃប្រហែលនៃល្បឿនមធ្យមក្នុងរយៈពេលតូចជាងគ្នាបន្តបន្ទាប់៖

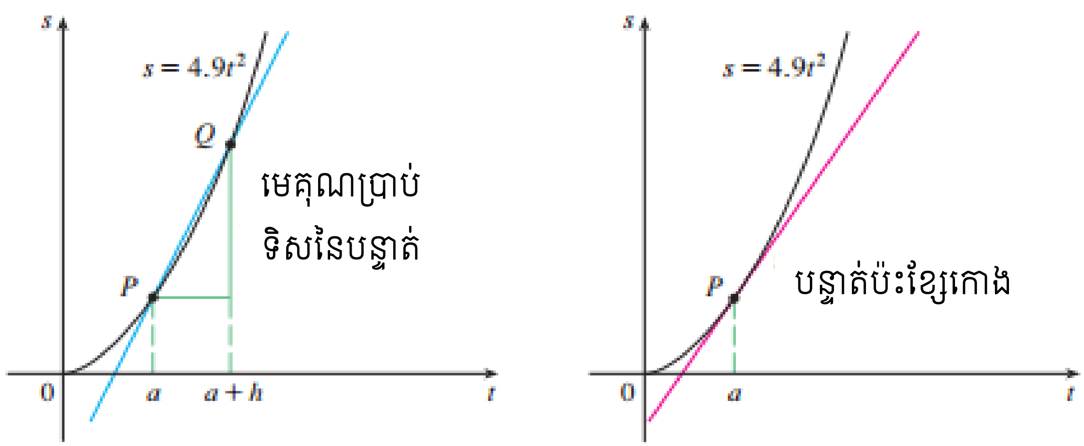
Time interval	Average velocity (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

វាបង្ហាញថានៅពេលយើងកាត់បន្ថយរយៈពេលពេលវេលាល្បឿនមធ្យមកាន់តែខិតទៅរក $49m/s$ ។ ល្បឿនល្បឿនបានកើតឡើងភ្លាមៗនៅពេលដែល $t=5$ គឺត្រូវបានកំណត់ជាតម្លៃកំណត់នៃល្បឿនមធ្យមទាំងនេះក្នុងរយៈពេលខ្លីទៅៗដែលចាប់ផ្ដើមពីពេល $t=5$ ។ ដូច្នេះល្បឿនខណៈ ក្រោយពេល $5s$ គឺ $v=49m/s$ ។

អ្នកអាចមានអារម្មណ៍ថាការគណនាដែលត្រូវបានប្រើក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហានេះគឺស្រដៀងគ្នាទៅនឹងអ្វីដែលបានប្រើមុននៅក្នុងផ្នែកនេះដើម្បីរកតង់សង់។ តាមពិតមានការជាប់ទាក់ទងគ្នាយ៉ាងជិតស្និទ្ធរវាងតង់សង់និងការរកល្បឿន។ ប្រសិនបើយើងគូសក្រាហ្វជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយរបស់បាល់ (ដូចក្នុងរូបភាពទី ៥) ហើយយើងពិចារណាលើចំណុច $P(a,4.9a^2)$ និង $Q(a+h,4.9(a+h)^2)$ នៅលើក្រាហ្វ ហើយមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ PQ គឺ៖

$$m_{PQ}=\frac{4.9(a+h)^2-4.9a^2}{(a+h)-a}$$

អ្វីដែលដូចគ្នានឹងល្បឿនមធ្យមក្នុងចន្លោះពេល $[a,a+h]$ ។ ដូច្នេះ ល្បឿននៅនៅខណៈពេល $t=a$ (លីមីតនៃល្បឿនមធ្យមទាំងនេះដែល h ខិតជិត 0) ត្រូវតែស្មើនឹងតម្លៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ត្រង់ចំណុច P (លីមីតនៃមេគុណប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ប៉ះ) ។



ឧទាហរណ៍ទី ១ និង ៣ បង្ហាញថាដើម្បីដោះស្រាយរកតង់សង់និងល្បឿនយើងត្រូវតែរកលីមីត។ បន្ទាប់ពីនេះយើងនឹងសិក្សាវិធីសម្រាប់រកលីមីតនៅ ៥ ផ្នែកបន្ទាប់ទៀត។ យើងនឹងត្រឡប់ទៅសិក្សាការពីការរកតង់សង់និងល្បឿននៅផ្នែកទី ២.៧ ។

លំហាត់

1. ធុងមួយផ្ទុកទឹកបានចំណុះ $1000l$ ដែលហូរចេញពីបាតធុងក្នុងរយៈពេលកន្លះម៉ោង។ តម្លៃនៅក្នុងតារាងបង្ហាញពីមាឌទឹក V ដែលនៅសល់ក្នុងធុង (គិតជា l) បន្ទាប់ពីប្រើពេល t (គិតជានាទី) ។

t (min)	36	38	40	42	44
Heartbeats	2530	2661	2806	2948	3080

ក). ប្រសិនបើ P ជាចំណុច $(15,250)$ នៅលើក្រាហ្វ V រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ PQ នៅពេលដែល Q ជាចំណុចនៅលើក្រាហ្វត្រូវនឹងពេល $t = 5,10,20,25$ និង 30 ។

ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ត្រង់ P ដោយគិតជាមធ្យមនៃមេគុណប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរ។

គ). ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ P (មេគុណប្រាប់ទិសនេះតាងឱ្យអត្រាបម្រែបម្រួលទឹកកំពុងហូរចេញពីធុងក្រោយពេល ១៥ នាទី។)

2. ម៉ូនីទ័រវាស់ចង្វាក់បេះដូងត្រូវបានប្រើដើម្បីវាស់ចង្វាក់បេះដូងរបស់អ្នកជំងឺបន្ទាប់ពីការវះកាត់។ វាចងក្រងចំនួនចង្វាក់បេះដូងបន្ទាប់ពីប្រើពេល t (គិតជានាទី)។ នៅពេលទិន្នន័យនៅក្នុងតារាងត្រូវគូសជាក្រាហ្វ គឺមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់តាងឱ្យចង្វាក់បេះដូងក្នុងមួយនាទី។

t (min)	36	38	40	42	44
Heartbeats	2530	2661	2806	2948	3080

ម៉ូនីទ័រចង្វាក់បេះដូងប៉ាន់ស្មានតម្លៃនេះដោយគណនាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ។ ប្រើទិន្នន័យដើម្បីប៉ាន់ស្មានចង្វាក់បេះដូងរបស់អ្នកជំងឺ។បន្ទាប់ពីប្រើពេលអស់ ៤២ នាទីដោយប្រើបន្ទាត់ប៉ះ

រវាង

ចំណុចជាមួយតម្លៃ t ដែលបានផ្តល់ឱ្យ៖

(ក). $t=36$ និង $t=42$ (ខ) $t=38$ និង $t=42$ ។

(ខ). $t=40$ និង $t=42$ (ឃ) $t=42$ និង $t=44$ ។

តើអ្នកសន្និដ្ឋានដូចម្តេច?

3. ចំណុច $P(2,-1)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោងដែល $y=1/(1-x)$ ។

(ក). បើចំណុច $Q(x,1/(1-x))$ ។ ចូរប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខរបស់អ្នកដើម្បីរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ PQ ទៅតាមតម្លៃ x ដូចខាងក្រោម:

(i) 1.5 (ii) 1.9 (iii) 1.99 (iv) 1.999

(v) 2.5 (vi) 2.1 (vii) 2.01

(viii) 2.001 ។

(ខ). ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ (ក) ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់

ទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច $P(2,-1)$ ។

(គ). ដោយប្រើមេគុណប្រាប់ទិសពីផ្នែក (ខ) រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ទៅខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុច $P(2,-1)$ ។

4. ចំណុច $P(0.5,0)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោងដែល $y=\cos\pi x$ ។

(ក). បើចំណុច $Q(x,\cos\pi x)$ ។ ចូរប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខរបស់អ្នកដើម្បីរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ PQ ទៅតាមតម្លៃ x ដូចខាងក្រោម៖

(i) 0 (ii) 0.4 (iii) 0.49 (iv) 0.499

(v) 1 (vi) 0.6 (vii) 0.51 (viii) 0.501 ។

(ខ). ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ (ក) ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់សង់ទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច $P(0.5,0)$ ។

(គ). ដោយប្រើមេគុណប្រាប់ទិសពីផ្នែក (ខ) រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ទៅខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុច $P(0.5,0)$ ។

(ឃ). សង់ខ្សែកោង បន្ទាត់ប៉ះពីរ និង បន្ទាត់តង់សង់។

5. ប្រសិនបើបាល់មួយត្រូវបានគេបោះចោលទៅក្នុងខ្យល់ដោយល្បឿន $40\,ft/s$ ដែលកម្ពស់គិតជាហ្វីត(ft) និង t គិតជាវិនាទី ក្រោយមកត្រូវបានផ្តល់ដោយសមីការ $y=40t-16t^2$ ។

(ក). រកល្បឿនមធ្យមសម្រាប់រយៈ(s)ពេលចាប់ផ្តើម$t=2$ និងរយៈពេលខណៈ

(i) 0.5 វិនាទី (ii) 0.1 វិនាទី។

(iii) 0.05 វិនាទី (iv) 0.01 វិនាទី។

(ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃល្បឿនខណៈនៅខណៈ $t=2$ ។

6. ប្រសិនបើដុំថ្មមួយត្រូវបានគេបោះចោលទៅក្នុងភពព្រះអង្គារដោយល្បឿន $10m/s$ ដែលកម្ពស់គិតជាម៉ែត្រ(m) និង t គិតជាវិនាទី(s) ក្រោយមកត្រូវបានផ្តល់ដោយសមីការ $y=10t-1.86t^2$ ។

(ក). រកល្បឿនមធ្យមទៅតាមពេលដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោម៖

(i) $[1,2]$ (ii) $[1,1.5]$ វិនាទី។

(iii) $[1,1.1]$

(iv) $[1,1.01]$ (v) $[1,1.001]$ ។

(ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃល្បឿនខណៈនៅខណៈ $t=1$ ។

7. តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីទីតាំងរបស់អ្នកជិះកង់៖

t (seconds)	0	1	2	3	4	5
s (meters)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(ក). រកល្បឿនមធ្យមសម្រាប់រយៈពេលនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

(i) $[1,3]$ (ii) $[2,3]$ (iii) $[3,5]$ (iv) $[3,4]$

(ខ). ប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ និង ដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃល្បឿនដែលកើតឡើងភ្លាមៗនៅខណៈពេល $t=3$ ។

8. បម្លាស់ទីភាគល្អិតមួយ (គិតជា cm) ដែលផ្លាស់ទីថយក្រោយ និង ទៅមុខនៅលើបន្ទាត់មួយឲ្យដោយសមីការ $s=2\sin\pi t+3\cos\pi t$ ដែល t គិតជាវិនាទី

(ក). រកល្បឿនមធ្យមក្នុងរយៈពេលនីមួយៗដូខាងក្រោម៖

(i) $[1,2]$ (ii) $[1,1.1]$

(iii) $[1,1.01]$ (iv) $[1,1.001]$

(ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានល្បឿនខណៈនៃភាគល្អិតនៅពេល $t=1$ ។

9. ចំណុច $P(1,0)$ នៅលើខ្សែកោងដែលមានសមីការ $y=\sin(10\pi/x)$ ។

(ក). បើចំណុច $Q(x,\sin(10\pi/x))$ ។ រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ PQ ទៅតាមតម្លៃ $x=2,1.5,1.4,1.3,1.2,1.1,0.5,0.6,0.7,0.8$ និង 0.9 ។ តើមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះមានលីមី

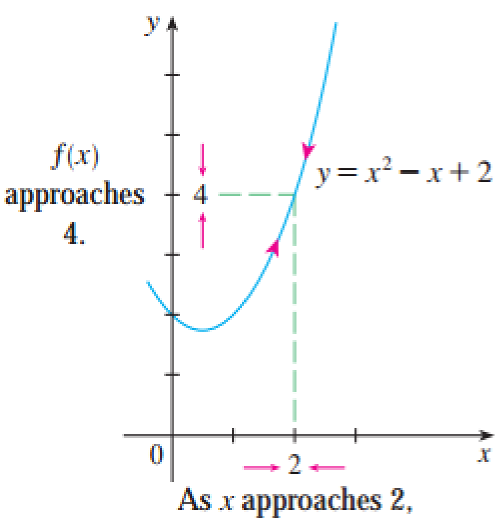
តដែររឺទេ ?

(ខ). ប្រើក្រាហ្វនៃខ្សែកោង ដើម្បីពន្យល់ថា ហេតុអ្វីបានជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្នុង សំណួរ (ក) មិនខិតទៅរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ង់សង់ត្រង់ P ។

(គ). ដោយធ្វើការជ្រើសរើសបន្ទាត់ប៉ះសមរម្យ ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មាននៃបន្ទាត់តង់សង់ត្រង់ P ។

២.២. លីមីតនៃអនុគមន៍

ដូចបានឃើញនៅក្នុងផ្នែកមុនថា តើលីមីតកើតឡើងយ៉ាងដូចម្តេចនៅពេលដែលយើងចង់ស្វែងរកតង់សង់នៃខ្សែកោងឬល្បឿននៃវត្ថុមួយ ឥឡូវនេះយើងបង្វែរការចាប់អារម្មណ៍របស់យើងទៅលើលីមីតដែលជាទូទៅយើងមានវិធីជាលេខនិងការគូសក្រាហ្វសម្រាប់គណនារកលីមីត។ សូមធ្វើការ អង្កេតអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ $f(x)=x^2-x+2$ ដែល x ខិតជិត 2 ។ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីតម្លៃ $f(x)$ សម្រាប់តំលៃ x ខិតជិត 2 ប៉ុន្តែវាមិនបានស្មើនឹង 2 នោះទេ។



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

រូបទី១

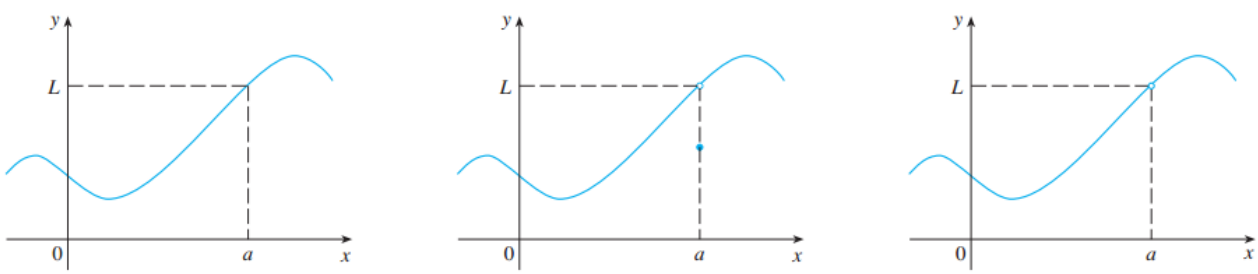
ពីតារាងនិងក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f (ប៉ារ៉ាបូល) ដែលបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី ១ យើងឃើញថានៅពេលណា ដែល x ខិតជិត 2 នោះ $f(x)$ ខិតជិត 4 ។ តាមពិតវាបង្ហាញថាយើងអាចបង្កើតតម្លៃ $f(x)$ ដែលខិតជិត 4 ដោយធ្វើការយកតម្លៃ x ឱ្យខិតជិត 2 ។ យើងអាចនិយាយបានថា លីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-x+2$ គឺស្មើនឹង 4 នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 2 ។ គេកំណត់សរសេរដោយ៖ $\lim_{x\to2}(x^2-x+2)=4$

1. **និយមន័យ៖** ឧបមាថាអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រូវបានកំណត់នៅពេលដែល x ខិតជិត a ។គេកំណត់សរសេរដោយ៖ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។ យើងអាចនិយាយបានថា លីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃស្មើនឹង L ។

និយាយឱ្យចំទៅក្នុងនិយមន័យខាងលើនេះចង់និយាយថាតម្លៃនៃ $f(x)$ ខិតទៅរក L ដូចដែល x ខិតទៅរក a ដែល $x\neq a$ ។ គេកំណត់សរសេរបានថា៖

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ មានន័យថា } f(x)\to L \text{ នោះ } x\to a$$

សូមចាំថា " $x\neq a$ " គឺជានិយមន័យក្នុងលីមីត។ មានន័យថានៅក្នុងការរកលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺយើងយក x ខិតទៅរក a ប៉ុន្តែ x មិនស្មើ a ទេ។ តាមពិត $f(x)$ មិនចាំបាច់កំណត់ទេពេល $x=a$ ។ រឿងតែមួយគត់ដែលសំខាន់គឺរបៀបកំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ពេលដែលខិតជិត a ។



(ក) (ខ) (គ)

(រូបទី២)

រូបភាពទី ២ បង្ហាញពីក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ៣ ។ ចំណាំថានៅក្នុងផ្នែក (គ) មិនត្រូវបានកំណត់និង។

ផ្នែក (ខ) គឺ $f(a)\neq L$ ។ ប៉ុន្តែក្នុងករណីនីមួយៗមិនថាមានអ្វីកើតឡើងត្រង់ a ក៏ដោយវាជាការពិតដែល គេកំណត់សរសេរដោយ៖ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។

ក្នុងរូបទី២នេះ ដាលីមីតក្នុងករណីទាំង៣ ខាងលើនេះដែល $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកតម្លៃលីមីត $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ យើងសម្គាល់ឃើញថាអនុគមន៍ $f(x)=(x-1)/(x^2-1)$ មិនត្រូវបានកំណត់នៅពេល $x=1$ ទេ ប៉ុន្តែវាមិនមានបញ្ហាទេ ពីព្រោះនិយមន័យរបស់លីមីតនៃអនុគមន៍ $\lim_{x\to a} f(x)$ បានចែងថា យើងត្រូវគិតពិចារណាលើតម្លៃ x ដែលខិតទៅ a ប៉ុន្តែតម្លៃ x មិនស្មើ a នោះទេ។ តារាងខាងក្រោមផ្តល់ឲ្យនូវតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ហើយសម្រាប់តម្លៃរបស់ x ខិតទៅរក 1។

$x<1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

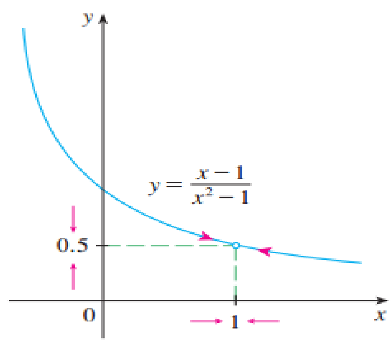
$x>1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

តាមតម្លៃនៅក្នុងតារាងយើងសន្និដ្ឋានបានថា៖ $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=0.5$

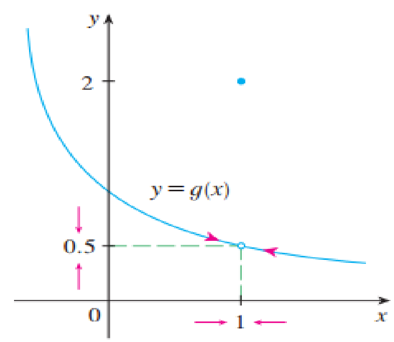
ឧទាហរណ៍ទី ១ ត្រូវបានបង្ហាញដោយក្រាហ្វិចនៃអនុគមន៍ f ក្នុងរូបភាពទី ៣។ ឥឡូវយើងផ្លាស់ប្តូរបន្តិចដោយផ្តល់តម្លៃនៃអនុគមន៍ស្មើ 2 នៅពេលដែល $x=1$ នោះយើងអាចសរសេរអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 2 \quad , & x=2\end{cases}$$

ចំពោះអនុគមន៍ថ្មី g នៅតែដូចលីមីតដើមដែរ គឺតម្លៃ x ខិតទៅរក 1 ដូចគ្នា (ដូចក្នុងរូបទី៤)។



(រូបទី៣)



(រូបទី៤)

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកតម្លៃលីមីត $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ ។

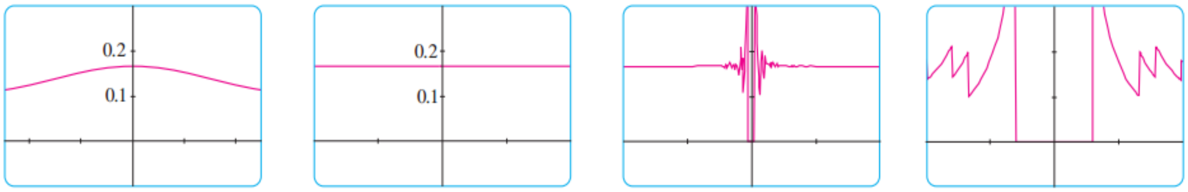
ដំណោះស្រាយ៖ តារាងខាងក្រោមនេះបង្ហាញពីតម្លៃនៃអនុគមន៍ និង តម្លៃ t ខិតទៅរក 0 ។

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

ដោយ t ខិតទៅរក 0 នោះតម្លៃនៃអនុគមន៍ហាក់បីដូចជាខិតទៅរក 0.1666666... នោះយើងអាចទស្សន៍ទាយចម្លើយនៃលីមី៖ $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$

ក្នុងឧទាហរណ៍ទី ២ គឺការគណនានៅលើក្រាហ្វឬកុំព្យូទ័រ។ ផ្នែក (a) និង (b) នៃរូបភាពទី ៥ បង្ហាញយ៉ាងច្បាស់ពីក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f បានយ៉ាងត្រឹមត្រូវ ហើយនៅពេលយើងប្រើរបៀបដាន (ប្រសិនបើវាជាអញ្ញាតិ) យើងអាចប៉ាន់ស្មានបានយ៉ាងងាយស្រួលថាលីមីតនៃអនុគមន៍មានតម្លៃប្រហែល $\frac{1}{6}$ ។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងពង្រីកក្រាហ្វនោះឲ្យកាន់តែធំដូចជាផ្នែក (c) និង (d) នៃរូបទី៥ នោះយើងទទួលបាន

ក្រាហ្វមិនត្រឹមត្រូវទេ ដោយសារតែមានបញ្ហាជាមួយនឹងការដកចេញ។



(a) [−5, 5] by [−0.1, 0.3] (b) [−0.1, 0.1] by [−0.1, 0.3] (c) [-10^{-6}, 10^{-6}] by [−0.1, 0.3] (d) [-10^{-7}, 10^{-7}] by [−0.1, 0.3]

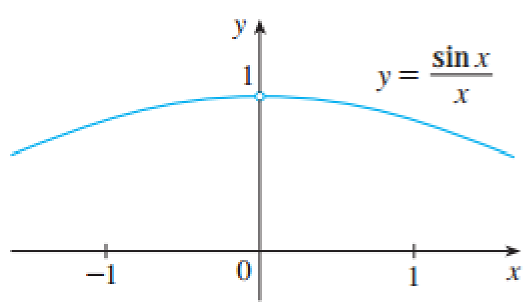
(រូបទី៥)

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ រកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ អនុគមន៍ $f(x)=(\sin x)/x$ គឺមិនកំណត់នៅពេលដែល $x=0$ ទេ។ តាមអនុគមន៍គេបាន x□ $\in$។ យើងអាចធ្វើការគណនា $f(x)=(\sin x)/x$ ដោយយកតម្លៃក្រោយក្បៀស 8 ខ្ទង់។ តាមការគណនាគេបានតារាង និង បានសង់ក្រាហ្វដូចខាងក្រោម៖

x	$\frac{\sin x}{x}$
±1.0	0.84147098
±0.5	0.95885108
±0.4	0.97354586
±0.3	0.98506736
±0.2	0.99334665
±0.1	0.99833417
±0.05	0.99958339
±0.01	0.99998333
±0.005	0.99999583
±0.001	0.99999983

(តារាង)



(ក្រាហ្វនៃ $f(x)=(\sin x)/x$ (រូបទី៦))

តាមតារាង និង ក្រាហ្វខាងលើគេបានចម្លើយនៃលីមីតគឺ៖ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូរធ្វើការសង្កេតតម្លៃលីមីត $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{x})$ ។

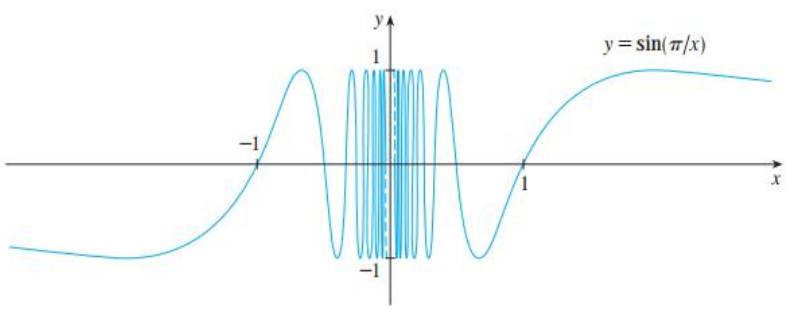
ដំណោះស្រាយ៖ ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=\sin(\pi/x)$ មិនកំណត់ត្រង់ 0 នោះទេ។ តាមការជ្រើសតម្លៃ x គេទទួលបានតម្លៃនៃអនុគមន៍ដូចតទៅ៖

$f(1)=\sin\pi=0$ $\qquad$ $f(\frac{1}{2})=\sin 2\pi=0$

$f(0.1)=\sin 10\pi=0$ $\qquad$ $f(0.01)=\sin 100\pi=0$

តាមការគណនាខាងលើយើងបានចម្លើយនៃលីមីតគឺ៖ $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}=0$

ប៉ុន្តែការប៉ាន់ស្មានចម្លើយនៃលីមីតរបស់យើងពេលនេះ មិនទាន់ត្រឹមត្រូវនៅឡើយទេ។ យើងត្រូវដឹងថាបើ $f(1/n)=\sin n\pi=0$ គ្រប់ចំនួនគត់ n ហើយវាពិតផងដែរដែល $f(x)=1$ ចំពោះតម្លៃនៃ x ខិតទៅរក 0 ។ យើងអាចពិនិត្យនៅលើក្រាហ្វខាងក្រោម(រូបទី៧)។



(រូបទី៧)

បន្ទាត់ដាច់ៗ នៅនៅលើអ័ក្ស y បង្ហាញថាតម្លៃនៃលំយោល $\sin(\pi/x)$ រវាង1 និង -1 គឺគ្មានទីបញ្ចប់ដូចដែល x ខិតទៅរក 0 នោះទេ។ (សូមមើលឧទាហរណ៍ទី ៤៥) ។ ដោយសារតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ពេល x ខិតទៅរក 0 នោះគេបានចម្លើយរបស់លីមីតនៃអនុគមន៍គឺ៖

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x} \text{ គ្មានចម្លើយ}$$

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ រកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0}(x^3+\frac{\cos 5x}{10,000})$ ។

ដំណោះស្រាយៈ យើងបង្កើយតារាងតម្លៃលេខដូចមុន។

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

(តារាងទី១)

តាមតារាងទី១យើងទាញបានថាៈ $\lim_{x\to 0}(x^3+\dfrac{\cos 5x}{10,000})=0$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

(តារាងទី២)

ប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងព្យាយាមដាក់តម្លៃនៃ x ឲ្យតូច(តារាងទី២) នោះយើងឃើញថាតម្លៃនៃលីមីតគឺៈ

$\lim_{x\to 0}(x^3+\dfrac{\cos 5x}{10,000})=0.000100=\dfrac{1}{10,000}$ (ព្រោះ $\lim_{x\to 0}\cos 5x=1$)

នោះគេបានចម្លើយនៃលីមីតគឺ $\lim_{x\to 0}(x^3+\dfrac{\cos 5x}{10,000})=0.0001$

ឧទាហរណ៍ទី ៤ និង ៥ បង្ហាញពីចំណុចគ្រោះថ្នាក់មួយចំនួនខ្លះៗក្នុងការគណនាលីមីត។ វាគឺងាយស្រួលទាយតម្លៃខុសប្រសិនបើយើងប្រើតម្លៃ x មិនបានត្រឹមត្រូវ ប៉ុន្តែវាពិបាកដឹងដែរនៅពេលគណនាតម្លៃរបស់វារួចៗ ហើយដូចដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី២ បង្ហាញពេលខ្លះម៉ាស៊ីនគិតលេខនិងកុំព្យូទ័រផ្តល់តម្លៃខុស។ ទោះយ៉ាងណានៅក្នុងផ្នែកបន្ទាប់យើងនឹងបង្កើតវិធីសាស្រ្តដ៏ល្អសម្រាប់គណនារកតម្លៃលីមីត។

ឧទាហរណ៍ទី៦៖ គេឲ្យអនុគមន៍ H ដែលកំណត់ដោយ៖

$$H(t)=\begin{cases}0 & \text{បើ } t<0\\ 1 & \text{បើ } t>=0\end{cases}$$

[អនុគមន៍នេះត្រូវបានដាក់ឈ្មោះតាមវិស្វករអគ្គិសនីមានឈ្មោះថា Oliver Heaviside (១៨៥០-១៩២៥) និង អាចប្រើដើម្បីពិពណ៌នាអំពីចរន្តអគ្គិសនីដែលត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរនៅពេល $t=0$] ដូចបានក្រាហ្វបង្ហាញក្នុងរូបទី៨។

នៅពេលដែល t ខិតទៅ 0 ផ្នែកខាងឆ្វេងនោះ $H(t)$ ខិតទៅរក 0 ហើយពេលដែល t ខិតទៅរក 0 ផ្នែកខាងស្តាំនោះ $H(t)$ ខិតទៅរក 1។ វាគ្មានតម្លៃលីមីតទេ នៅពេលដែល t ខិតទៅរក 0។ ដូចនេះ $\lim_{x\to 0} H(t)$ គ្មានចម្លើយទេ។

លីមីតមួយចំហៀង

ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៦ អនុគមន៍ $H(t)$ ខិតទៅរក 0 នៅពេលដែល t ខិតទៅរក 0 ផ្នែកខាងឆ្វេង និង $H(t)$ ខិតទៅរក 1 នៅពេលដែល t ខិតទៅរក 0 ផ្នែកខាងស្តាំ។ គេអាចសរសេរបានថា៖

$\lim_{x\to 0^-} H(t)=0$ និង $\lim_{x\to 0^+} H(t)=1$

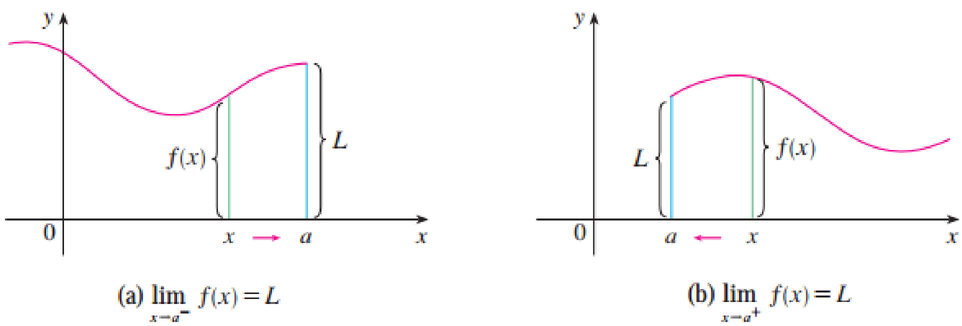
- ពេល "$t\to 0^-$" មានន័យថា តម្លៃនៃ t តូចជាង 0
- ពេល "$t\to 0^+$" មានន័យថា តម្លៃនៃ t ធំជាង 0។

2. **និយមន័យ៖** គេអាចសរសេរនិយមន័យបានដូចខាងក្រោម៖ $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

មានន័យថា លីមីតនៅខាងឆ្វេងដៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ស្មើតម្លៃ L បើសិនជាយើងយកតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ខិតទៅជិត L ដោយយកតម្លៃ x ខិតទៅជិត a ប៉ុន្តែតូចជាង a។

យើងត្រូវចាំថា ចំពោះនិយមន័យទី២ ខុសគ្នាពីនិយមន័យទី១គឺយើងឲ្យ x តូចជាង a ប៉ុណ្ណោះ។ ដូចគ្នាដែរ បើសិនជាយើងឲ្យតម្លៃនៃ x ធំជាង a នោះយើងទទួលបានលីមីតនៅខាងស្តាំដៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ស្មើ L ពេលដែល x ខិតទៅរក a។ គេអាចសរសេរបានថា៖ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

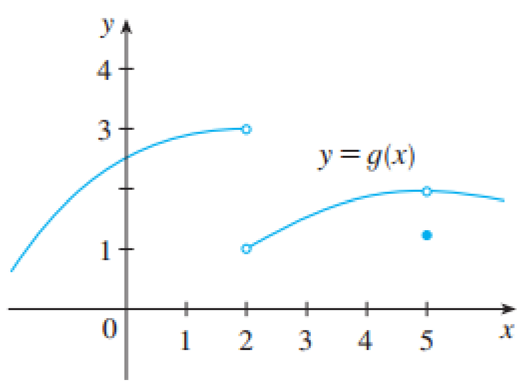
មានន័យថា "$x\to a^+$" មានន័យថាតម្លៃនៃ $x>a$ ។ តាមនិយមន័យខាងលើគូសបានក្រាហ្វដូចខាងក្រោម(រូបទី៩)៖



(រូបទី៩)

3. ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបរវាង **និយមន័យទី១** និង **លីមីតផ្នែកចំហៀង** គេអាចសរសេរបានថា៖ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ និង $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧៖ គេមានក្រាហ្វនៃអនុគមន៍មួយដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី១០។ ប្រើក្រាហ្វនេះ ដើម្បីបង្ហាញពីតម្លៃនៃលីមីតដូចខាងក្រោម៖



(a) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x\to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x\to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x\to 5} g(x)$

ដំណោះស្រាយ៖ តាមក្រាហ្វយើងឃើញថាតម្លៃ $g(x)$

ខិតទៅរក 3 នៅពេលដែល x ខិតទៅជិត 2 ផ្នែកខាងឆ្វេង ប៉ុន្តែ $g(x)$ ខិតទៅរក 1 នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 2 ផ្នែកខាងស្តាំ។ ដូចនេះ៖

a). $\lim_{x\to 2^-} g(x)=3$ និង b). $\lim_{x\to 2^+} g(x)=1$

(c) ដោយសារតែ លីមីតផ្នែកខាងឆ្វេង ខុសគ្នាពីលីមីតផ្នែកខាងស្តាំនោះតាមនិយមន័យត្រង់ 3 នោះ

$\lim_{x\to 2} g(x)$ គ្មានលីមីត។

(d) $\lim_{x\to 5^-} g(x)=2$ និង (e) $\lim_{x\to 5^+} g(x)=2$

(f) ពេលនេះលីមីតផ្នែកខាងឆ្វេង និង ផ្នែកខាងស្តាំមានតម្លៃដូចគ្នា តាម 3. យើងបាន៖

$$\lim_{x\to 5} g(x)=2$$

ចំណាំ៖ ទោះបីជាអនុគមន៍មានលីមីតក៏ដោយ ប៉ុន្តែត្រូវចាំថា $g(x)\neq 2$ ។

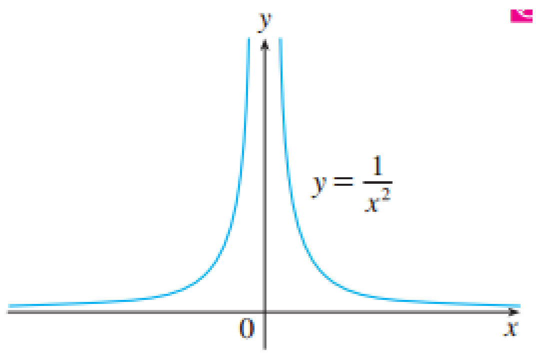
លីមីតអនន្ត

ឧទាហរណ៍ទី៨៖ រកលីមីតនៃអនុគមន៍ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ ប្រសិនបើមានលីមីត។

ដំណោះស្រាយ៖ នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 0 នោះ x^2 ក៏ខិតទៅរក 0 ដែរ ហើយវាធ្វើឲ្យ $1/x^2$ កាន់តែធំ (មើលនៅក្នុងតារាង)។

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

ជាការពិត វាត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=1/x^2$ ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី១១ ដែលតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កាន់តែធំនៅពេលដែលយើងឲ្យតម្លៃនៃ x ខិតទៅរក 0 ។



រូបទី១១

ដូចនេះតម្លៃនៃអនុគមន៍ មិនខិតទៅរកចំនួនណាមួយទេ នោះ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ គឺគ្មានលីមីត។

តាមការបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៨ នោះយើងអាចធ្វើការកត់សម្គាល់បានថា៖ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

នេះមិនមែនមានន័យថា យើងមើលឃើញតម្លៃ ∞ ដូចតម្លៃលេខណាមួយនោះទេ ហើយក៏មិនមែនមានន័យថា វាគ្មានតម្លៃលីមីតនោះដែរ។ វាគ្រាន់តែបង្ហាញពីវិធីរកលីមីតណាមួយដែលគ្មានលីមីត: $\frac{1}{x^2}$ អាចធ្វើឲ្យកាន់តែធំដូចដែលយើងធ្វើឲ្យតម្លៃ x ខិតទៅរក 0 ។ ជាទូទៅគេអាចសរសេរបានថា៖ $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

រូបមន្តខាងលើនេះគឺ ដើម្បីបង្ហាញថាតម្លៃ $f(x)$ កាន់តែធំទៅៗ (កាន់តែកើនឡើងទៅៗ) ដូចដែលយើងធ្វើឲ្យតម្លៃ x កាន់តែខិតទៅរក 0 ដូចគ្នា។

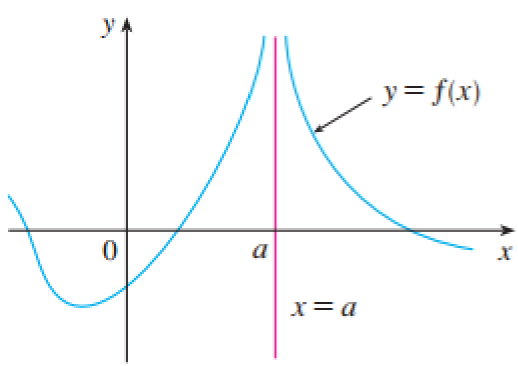
និយមន័យ៖ បើគេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់នៅលើ a ទាំងផ្នែកសងខាង តែលើកលែងខ្លួនវាចេញ នោះគេអាចសរសេរបាន៖ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

មានន័យថា តម្លៃនៃអនុគមន៍បានធ្វើឲ្យវាកាន់តែធំ (ធំដូចដែលយើងចង់បាន) ដោយយើងធ្វើឲ្យតម្លៃ x កាន់តែខិតទៅរក 0 ប៉ុន្តែវាមិនស្មើ 0 នោះទេ។

កំណត់សម្គាល់មួយទៀតនោះគឺ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ មានន័យថា៖ $f(x)\to\infty$ ដូចដែល $x\to a$

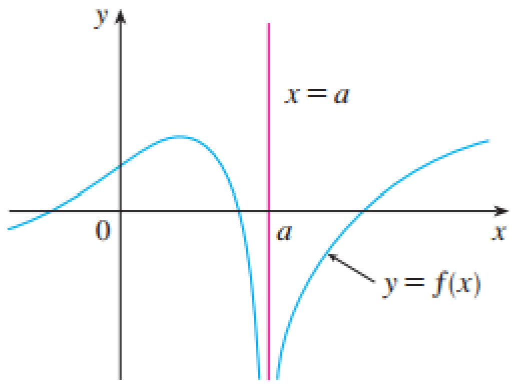
ជាថ្មីម្តងទៀត ចំពោះតម្លៃ ∞ មិនមែនជាចំនួនលេខណាមួយនោះទេ ប៉ុន្តែវាបានបញ្ជាក់ពី $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ដែលជារឿយៗយើងអានថា "**លីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល ខិតទៅរក a ដែលមានតម្លៃអនន្ត**" ឬ អានថា " **អនុមន៍ $f(x)$ ខិតទៅរក ∞ ពេលដែល x ខិតទៅរក a** " ឬ អានថា " **អនុគមន៍ $f(x)$ កាន់តែធំទៅៗនៅពេលដែល x ខិតទៅរក a** " ។

និយមន័យខាងលើនេះត្រូវបានបកស្រាយបំភ្លឺនៅក្នុងក្រាហ្វ នៅក្នុងរូបទី១២។



(រូបទី១២) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

ភាពស្រដៀងគ្នានៃប្រភេទលីមីត សម្រាប់អនុគមន៍ដែលខិតទៅរកតម្លៃអវិជ្ជមាន នៅពេលដែល x កាន់តែខិតទៅរក a គឺវាត្រូវបានកំណត់នៅក្នុងនិយមន័យទី ៥ ហើយត្រូវបានបកស្រាយបំភ្លឺនៅក្នុងរូបទី១៣។



(រូបទី១៣)

និយមន័យ៖ បើគេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់នៅលើផ្នែកទាំងសងខាង តែលើកលែងខ្លួនវាចេញ នោះគេអាចសរសេរបាន៖ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

មានន័យថាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ អាចធ្វើឲ្យវាមានតម្លៃអវិជ្ជមាននៅពេលដែលយើងយកតម្លៃ ខិតទៅរក a ប៉ុន្តែវាមិនស្មើ a នោះទេ។

ចំពោះ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ យើងអាចបានថា " **លីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a នោះតម្លៃលីមីតនៃអនុគមន៍ស្មើ** $-\infty$ " ឬ អានថា " **អនុគមន៍ $f(x)$ ថយចុះនៅពេល x ខិតទៅរក** a "។

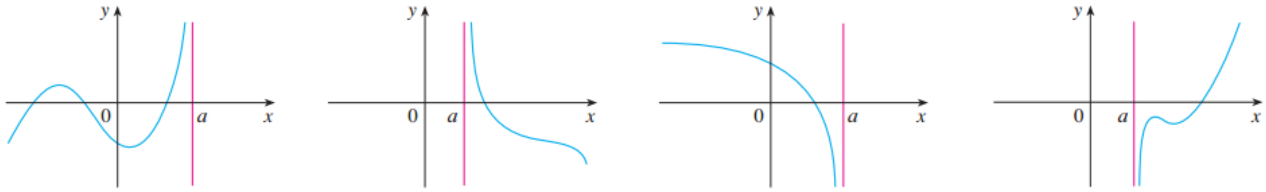
មើលនៅក្នុងឧទាហរណ៍គេមាន $\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$

ស្រដៀងគ្នាដែរណា តាមនិយមន័យបានផ្តល់នូវរូបមន្តនៃលីមីតអនន្តដូចខាងក្រោម៖

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

ត្រូវចងចាំថាពេល " $x\to a^-$ " មានន័យថាតម្លៃនៃ x តូចជាង a ហើយ ពេល " $x\to a^+$ " មានន័យថា $x > a$ ។ រូបមន្តខាងលើនេះត្រូវបានបកស្រាយបំភ្លឺនៅក្នុងរូបទី១៤។



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (c) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (d) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

(រូបទី១៤)

6 **និយមន័យ៖**បន្ទាត់ $x=a$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង $y=f(x)$ ។ គេកំណត់បានរូមន្តដូចខាងក្រោម ៖

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ∨ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

ចំពោះអ័ក្ស y គឺជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង $y=1/x^2$ ព្រោះ $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ ។ នៅក្នុងរូបទី១៤ គឺបង្ហាញពីបន្ទាត់ $x=a$ គឺជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរបួនផ្សេងគ្នា។ ជាទូទៅ ចំពោះអាស៊ីមតូតឈរមានសារៈសំខាន់ណាស់នៅក្នុងការគូសក្រាហ្វ។

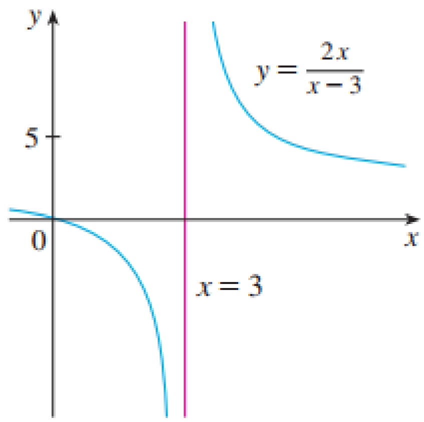
ឧទាហរណ៍ទី៩៖ រកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}$ និង $\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បើ x ខិតទៅរក 3 ប៉ុន្តែវាធំជាង 3 នោះធ្វើឲ្យភាគបែង $x-3$ ក្លាយជាតម្លៃវិជ្ជមានដ៏តូចមួយហើយធ្វើ $2x$ ខិតទៅរក 6។ ដូចនេះ វាធ្វើឲ្យផលចែកនៃអនុគមន៍ $2x/(x-3)$ មានតម្លៃកាន់តែធំ។

គេកំណត់សរសេរដោយ៖ $\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=\infty$ ។

ម្យ៉ាងទៀត បើ x ខិតទៅរក 3 ប៉ុន្តែវាតូចជាង 3 នោះវាធ្វើឲ្យភាគបែង $x-3$ ក្លាយជាតម្លៃអវិជ្ជមានដ៏តូចមួយ តែចំពោះតម្លៃ $2x$ នៅតែខិតទៅរក 6 ជានិច្ច។ ដូចនេះ វាធ្វើឲ្យផលចែកនៃអនុគមន៍ $2x/(x-3)$ មានតម្លៃអវិជ្ជមាន។ ដូចនេះ $\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty$ ។

ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y=2x/(x-3)$ ត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១៥។ បន្ទាត់ $x=3$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង។



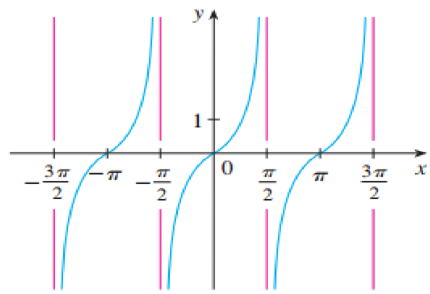
(រូបទី១៥)

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ ចូររកអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ ដោយ $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

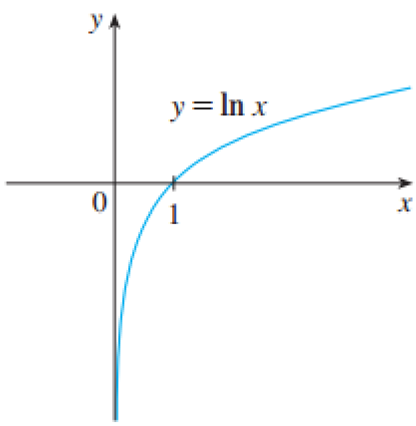
វាមានអាស៊ីមតូតឈរជាច្រើននៅក្នុងអនុគមន៍នេះ ដែល $\cos x=0$ ។ ជាការពិតដោយសារតែ $\cos x\to 0^+$ ដូចនឹង $x\to(\frac{\pi}{2})^-$ និង $\cos x\to 0^-$ ដូចនឹង $x\to(\frac{\pi}{2})^+$ ហើយតម្លៃ $\sin x$ ជាតម្លៃវិជ្ជមាននៅពេលដែល x ខិតទៅរក 0 ។ គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=\infty$ និង $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$ ។

នេះបង្ហាញឲ្យឃើញថា បន្ទាត់ $x=\dfrac{\pi}{2}$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈរ។ ស្រដៀងនេះគ្នា តាមលទ្ធផលបានបង្ហាញថា បន្ទាត់ $x=(2n+1)\pi/2$ ជាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល n ជាចំនួនគត់(ដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១៦)។



(រូបទី១៦)

នៅក្នុងឧទាហរណ៍ផ្សេងទៀត ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ដែលមានអាស៊ីមតូតឈរគឺនៅក្នុងអនុគមន៍ $y=\ln x$ (ដូចនៅក្នុងរូបទី១៧)។



(រូបទី១៧)

គេបានចម្លើយនៃលីមីតគឺ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ។

ចំពោះបន្ទាត់ $x=0$ (អ័ក្ស y) គឺជាអាស៊ីមតូតឈរ។ ជាការពិត ចំពោះអនុគមន៍ $y=\log_a x$ គឺដូចគ្នានឹងអនុគមន៍ $y=\ln x$ (មើលនៅក្នុងរូបទី ១១ និង ១២ ក្នុងផ្នែក 1.6)។

លំហាត់

1. ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីត $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$។ តើវាពិតរឺទេ ដែល $f(2)=3$? ចូរព្យល់។
2. ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីតខាងក្រោម៖

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$ និង $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=7$ ។

   នៅក្នុងករណីនេះ តើតម្លៃលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ មានដែររឺទេ ? ចូរពន្យល់។

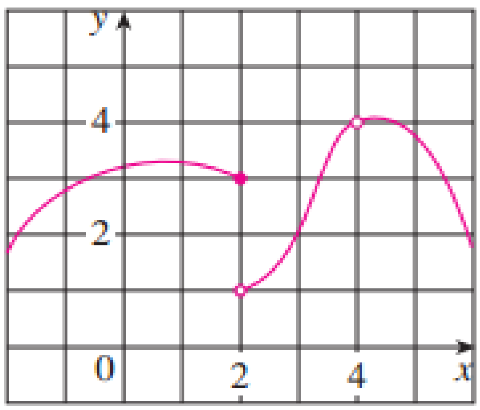
3. ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីតដូចខាងក្រោម៖

(a) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$ ។

4. ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីតខាងក្រោម បើវាមានលីមីត។ ហើយបើវាមិនមានលីមីត ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុរបស់វា។

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

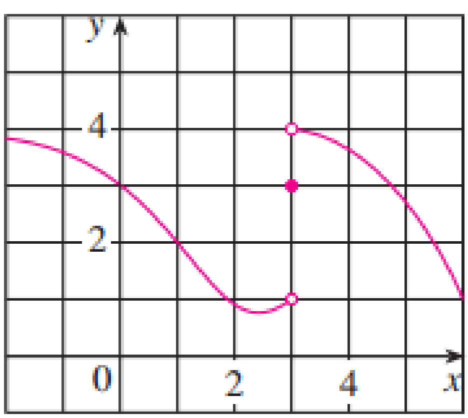
(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (f) $f(4)$ ។



5. គេមានអនុគមន៍ f ដែលមាននៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីត បើវាមានលីមីត។ ហើយបើវាមិនមានលីមីត ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុរបស់វា។

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$ ។



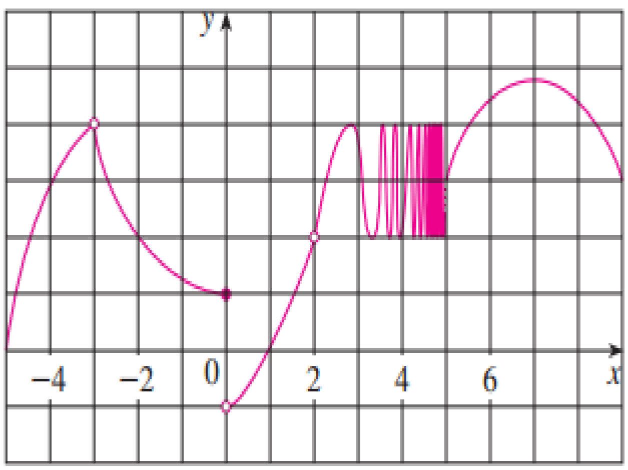
6. គេមានអនុគមន៍ h ដែលមាននៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីត បើវាមានលីមីត។ ហើយបើវាមិនមានលីមីត ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុរបស់វា។

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

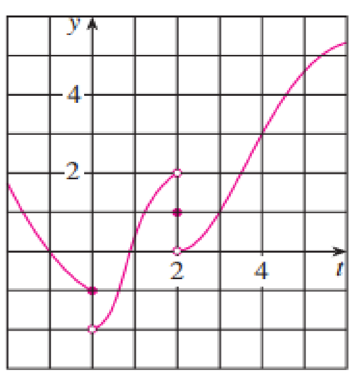
(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$ ។



7. គេមានអនុគមន៍ g ដែលមាននៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីត បើវាមានលីមីត។ ហើយបើវាមិនមានលីមីត ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុរបស់វា។



(a) $\lim_{x\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{x\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{x\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{x\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{x\to 2} g(t)$

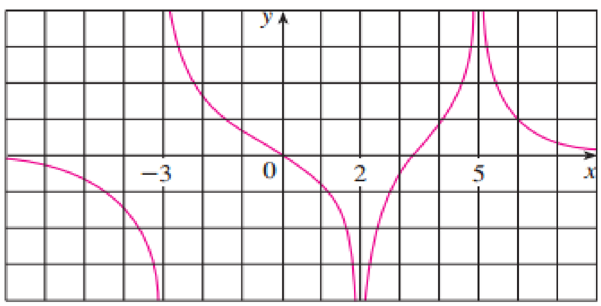
(g) $g(2)$ (h) $\lim_{x\to 4} g(t)$ ។

8. គេមានអនុគមន៍ R ដែលមាននៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យរបស់ផ្នែកនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

(e) សមីការអាស៊ីមតូតឈរ។



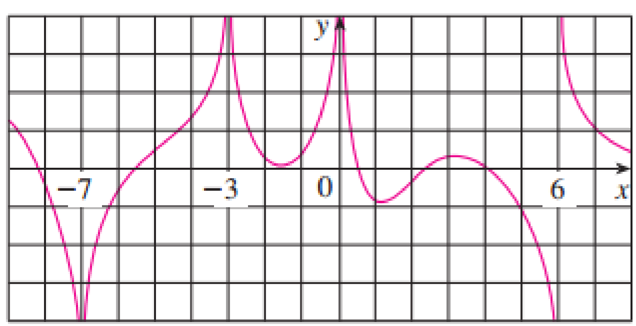
8. គេមានអនុគមន៍ f ដែលមាននៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យរបស់ផ្នែកនីមួយដូចខាងក្រោម៖

(a) $\lim_{x\to 7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

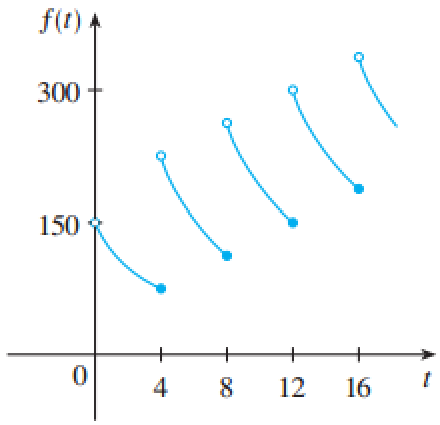
(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$

(e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

(f) សមីការអាស៊ីមតូតឈរ។



9. អ្នកជម្ងឺទទួលបានការចាក់ថ្នាំ $150g$ រៀងរាល់ 4 ម៉ោងម្តង។ ក្រាហ្វបង្ហាញពីចំនួននៃការចាក់ថ្នាំដោយ $f(t)$ នៅក្នុងបន្ទប់ស្រ្ទីមឈាមបន្ទាប់ពីប្រើអស់រយៈពេល t ។ ចូររក៖ $\lim_{t\to12^-} f(t)$ និង $\lim_{t\to12^+} f(t)$ រួចពន្យល់ពីសារៈសំខាន់នៃលីមីតចំហៀងខាងលើនេះ។



10. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ និង ប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីកំណត់តម្លៃ a ដែល $\lim_{x\to a} f(x)$ មានលីមីត។គេឲ្យអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ៖

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{បើ } x<-1\\ x^2 & \text{បើ } -1\le x<1\\ 2-x & \text{បើ } x\ge 1\end{cases}$$

11. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ និង ប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីកំណត់តម្លៃ a ដែល $\lim_{x\to a} f(x)$ មានលីមីត។គេឲ្យអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ៖

$$f(x)=\begin{cases}1+\sin x & , \quad x<0\\ \operatorname{Cos} x & , \quad 0\le x\le \pi\\ \operatorname{Sin} x & , \quad x>\pi\end{cases}$$

12. ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដើម្បីរកតម្លៃនៃលីមីតដែលមាន។ បើសិនជាអនុគមន៍គ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុរបស់វា បើគេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ ដែលមានលីមីតដូចខាងក្រោម៖

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

13. ប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដើម្បីរកតម្លៃនៃលីមីតដែលមាន។ បើសិនជាអនុគមន៍គ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុរបស់វា បើគេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^3+x^2}}$ ដែលមានលីមីតដូចខាងក្រោម៖

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

14. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$, $f(0)=1$ ។

15. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$

$f(x)=-1$, $f(3)=1$

16. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=2$

$f(3)=3$, $f(-2)=1$

17. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=0$, $f(0)=2$, $f(4)=1$ ។

18. ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត(បើមាន) ដោយ ការគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលឲ្យ(ត្រឹមត្រូវដល់ទៅប្រាំមួយខ្ទង់នៅក្រោយក្បៀស)៖

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ ចំពោះ $x=2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$ ។

19. ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត(បើមាន) ដោយ ការគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលឲ្យ(ត្រឹមត្រូវដល់ទៅប្រាំមួយខ្ទង់នៅក្រោយក្បៀស)៖

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x}{x^2-x-2}$ ចំពោះ

$x=0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999, -2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$ ។

20. ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត(បើមាន) ដោយ ការគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលឲ្យ(ត្រឹមត្រូវដល់ទៅប្រាំមួយខ្ទង់នៅក្រោយក្បៀស)៖ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5t}-1}{t}$ ចំពោះ

$t=\pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$ ។

21. ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត(បើមាន) ដោយ ការគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលឲ្យ(ត្រឹមត្រូវដល់ទៅប្រាំមួយខ្ទង់នៅក្រោយក្បៀស)៖

$\lim_{x\to 0}\frac{(2+h)^5-32}{h}$ ចំពោះ $h=$ $t=\pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$ ។

22. ប្រើតារាងតម្លៃលេខ ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃលីមីត។ បើមានក្រាហ្វ ចូរប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីបញ្ជាក់ពីចម្លើយរបស់អ្នក៖ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ ។

23. ប្រើតារាងតម្លៃលេខ ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃលីមីត។ បើមានក្រាហ្វ ចូរប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីបញ្ជាក់ពីចម្លើយរបស់អ្នក៖ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$ ។

24. ប្រើតារាងតម្លៃលេខ ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃលីមីត។ បើមានក្រាហ្វ ចូរប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីបញ្ជាក់ពីចម្លើយរបស់អ្នក៖ $\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^{10}-1}$ ។

25. ប្រើតារាងតម្លៃលេខ ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃលីមីត។ បើមានក្រាហ្វ ចូរប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីបញ្ជាក់ពីចម្លើយរបស់អ្នក៖ $\lim_{x\to 0}\frac{9^x-5^x}{x}$ ។

26. ក). តាមរយៈក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=(\cos 2x-\cos x)/x^2$ និងការពង្រីកទៅចំណុចដែលក្រាហ្វកាត់អ័ក្ស y ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។

ខ). ចូរធ្វើការត្រួតពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកនៅក្នុងផ្នែក (a) ដោយធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f(x)$ នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 0 ។

27. ក). ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin \pi x}$ ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=(\sin x)/\sin \pi x$ ។ ចូរពន្យល់ពីចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវរបស់អ្នក ដោយយកតម្លៃក្រោយក្បៀសពីរខ្ទង់។

ខ). ចូរធ្វើការត្រួតពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកនៅក្នុងផ្នែក (a) ដោយធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f(x)$

នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 0 ។

28. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to -3^+}\frac{x+2}{x+3}$ ។

29. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to -3^-}\frac{x+2}{x+3}$ ។

30. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{(x-1)^2}$ ។

31. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to 5^-}\frac{e^x}{(x-5)^3}$ ។

32. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to 3^+}\ln(x^2-9)$ ។

33. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to \pi^-}\cot x$ ។

34. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to 2\pi^-} x\csc x$ ។

35. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ ។

36. ចូរគណនាតម្លៃលីមីតអនន្ត $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$ ។

37. ក). ចូររកអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍៖ $y=\frac{x^2+1}{3x-2x^2}$ ។

ខ). ចូរធ្វើការបញ្ជាក់ចម្លើយរបស់អ្នកនៅក្នុងផ្នែក (a) ដោយធ្វើការគូសក្រាហ្វនៃអនុគមន៍នោះ។

(ដោះស្រាយដោយប្រើកុំព្យូទ័រ)

38. ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^3-1}$ និង $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^3-1}$ ។

ក). ចំពោះលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)=1/(x^3-1)$ នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 0 ទាំងនៅផ្នែកខាងឆ្វេង និង ផ្នែកខាងស្តាំនៃលីមីត។

ខ). ចំពោះលទ្ធផលនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី ៩។

គ). ចំពោះក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f (ដោះស្រាយដោយប្រើកុំព្យូទ័រ)។

39. ក). តាមរយៈក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=(\tan 4x)/x$ និងការពង្រីកទៅចំណុចដែលក្រាហ្វកាត់អ័ក្ស y ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។

ខ). ចូរធ្វើការត្រួតពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកនៅក្នុងផ្នែក (a) ដោយធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $f(x)$ នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 0 ។ (ដោះស្រាយដោយប្រើកុំព្យូទ័រ)

40. ក). ចូរគណនាតម្លៃលីមីតនៃអនុគមន៍ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ ដោយយកតម្លៃក្រោយក្បៀសប្រាំខ្ទង់។ តើតម្លៃចំនួននេះ ស្រដៀងគ្នាដែរឬទេ?

ខ). ចូរពន្យល់ផ្នែក(ក)ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y=(1+x)^{1/x}$ ។

(ដោះស្រាយដោយប្រើកុំព្យូទ័រ)

41. ក). គេឲ្យក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=e^x+\ln|x-4|$ ដែល $0\le x\le 5$ ។ តើអ្នកគិតថា ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ត្រឹមត្រូវដែរឬទេ?

ខ). តើអ្នកអាចទទួលបានក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលល្អប្រសើរបានយ៉ាងដូចម្ដេច?

(ដោះស្រាយដោយប្រើកុំព្យូទ័រ)

42. ក). ចូរគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-(2^x/1000)$ ទៅតាមតម្លៃ

$x=1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ និង 0.05 រួចធ្វើការទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0}(x^2-\frac{2^x}{1000})$ ។

ខ). ចូរគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-(2^x/1000)$ ទៅតាមតម្លៃ

$x=0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ និង 0.001 រួចទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0}(x^2-\frac{2^x}{1000})$ ។

43. ក្នុងទ្រឹស្ដីធៀប ម៉ាសភាគល្អិតជាមួយល្បឿន v កំណត់ដោយ៖ $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

ដែល m_0 គឺជាម៉ាសភាគល្អិត និង c ជាល្បឿនពន្លឺ។ តើមានអ្វីកើតឡើង ពេល $v\to c$?

44. ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងអស់ នៃខ្សែកោង៖

$y=\tan(2\sin x)$ ដែល $-\pi\le x\le\pi$ រួចរកសមីការពិតប្រាកដនៃអាស៊ីមតូតទាំងនេះ។

45. ក). ចូរប្រើតម្លៃលេខ និង ក្រាហ្វដែលមាន ដើម្បីទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$ ។

ខ). តើត្រូវធ្វើដូចម្ដេច ដើម្បីធ្វើឲ្យ x វាខិតទោរក 1 ដើម្បីធានាថាអនុគមន៍នៅក្នុងផ្នែក (a) គឺស្ថិតនៅចម្ងាយ 0.5 ពីលីមីតរបស់វា?

២.៣. ការគណនា និង ការប្រើប្រាស់ច្បាប់លីមីត

នៅក្នុងផ្នែក 2.2 យើងប្រើការគណនា និង ក្រាហ្វ ដើម្បីទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត ប៉ុន្តែយើងឃើញវាវិធីទាំងនោះ គឺវាមិនត្រូវគ្រប់ពេលនោះទេ។ នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងប្រើលក្ខណៈរបស់លីមីតដែលត្រូវបានគេហៅថា " **ច្បាប់លីមីត** " ដើម្បីគណនាលីមីត។

ច្បាប់លីមីត៖ ឧបមាថា c ជាចំនួនថេរ និង លីមីត $\lim_{x\to a} f(x)$ និង $\lim_{x\to a} g(x)$ គេបានរូបមន្តដូចខាងក្រោម ៖

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)\backslash$
3. $\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$,បើ $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

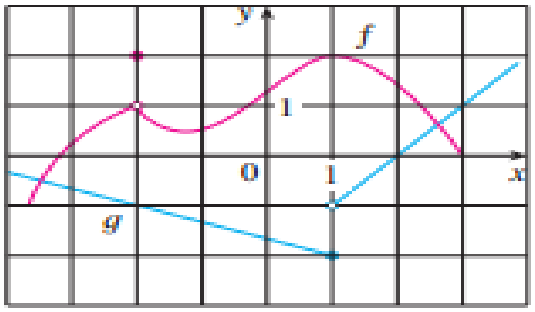
ច្បាប់លីមីតទាំង ៥ ដែលបានបញ្ជាក់ដូជខាងក្រោម៖

1. លីមីតនៃផលបូក គឺជាផលបូកនៃលីមីត (ច្បាប់ផលបូក)។
2. លីមីតនៃផលដក គឺជាផលដកនៃលីមី (ច្បាប់ផលសង)។
3. លីមីតផលគុណនៃចំនួនជងថេរនៃអនុគមន៍ គឺជាចំនួនជងថេររបស់លីមីតនៃអនុគមន៍ (ច្បាប់ចំនួនជងថេរនៃអនុគមន៍)។
4. លីមីតនៃផលគុណ គឺជាផលគុណនៃលីមីត (ច្បាប់ផលគុណ)។
5. លីមីតនៃផលចែក គឺជាផលចែកនៃលីមីត (ច្បាប់ផលចែក) (ចំពោះភាគបែងត្រូវខុសពី 0)។

វាពិតជាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការជឿថាលក្ខណៈទាំងអស់ខាងលើពិត។ ឧបមាថា បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L និង $g(x)$ ខិតទៅរក M នោះ $f(x)+g(x)$ ពិតជាខិតទៅរក $L+M$ ។ នេះបានផ្តល់ជាមូលដ្ឋានមួយដល់យើង ដើម្បីឲ្យជឿថាច្បាប់ទី១ ពិត។ នៅក្នុងផ្នែក 2.4 យើងផ្តល់ឲ្យនិយមន័យច្បាស់លាស់របស់លីមីត និង ប្រើវាដើម្បីបញ្ជាក់ពីច្បាប់នេះ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ប្រើច្បាប់លីមីត និង ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ និង នៅក្នុងរូបទី១ ដើម្បីគណនាតម្លៃលីមីតបន្តបន្ទាប់ដូចខាងក្រោម (បើមាន)៖

(a). $\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)]$ (b). $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$



(រូបទី១)

ដំណោះស្រាយ៖

(a). តាមក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f និង g យើងឃើញថា៖

$\lim_{x\to -2} f(x) = 1$ និង $\lim_{x\to -2} g(x) = -1$

គេបាន៖ $\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)]$ (ច្បាប់ទី១)

$= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x)$ (ច្បាប់ទី៣)

$= 1 + 5(-1) = -4$

(b). យើងឃើញថា $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ។ ប៉ុន្តែ $\lim_{x\to 1} g(x)$ គ្មានលីមីត ព្រោះលីមីតនៅផ្នែកខាងឆ្វេងខុសគ្នាពីលីមីតដែលនៅផ្នែកខាងស្តាំគេបាន៖ $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2$ និង $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$

ដូចនេះយើងមិនអាចប្រើច្បាប់ទី៤ នៃលីមីតសម្រាប់រកលីមីតនេះបានទេ ប៉ុន្តែយើងអាចប្រើច្បាប់ទី៤ សម្រាប់លីមីតផ្នែកផ្សេងគ្នាបានមានដូចជា៖

$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-2) = -4$ និង $\lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-1) = -2$

លីមីតនៅផ្នែកខាងឆ្វេង និង ខាងស្តាំមិនស្មើគ្នាទេ ដូចនេះ លីមីត $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ គ្មានលីមីតទេ។

(c). តាមក្រាហ្វបានបង្ហាញថា៖ $\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4$ និង $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$ ។ ដោយសារលីមីតខាងផ្នែកភាគបែងស្មើសូន្យ នោះយើងមិនអាចប្រើច្បាប់ទី៥ នៃលីមីតបានទេ។ វាគ្មានលីមីតទេព្រោះលីមីតនៃភាគបែងរបស់វាខិតទៅរក 0 ស្របពេលដែលភាគយកខិតទៅរកចំនួនដែលខុសពី 0 ។

បើយើងប្រើច្បាប់ផលគុណនៃលីមីតម្តងហើយម្តងទៀតគឺឲ្យ $f(x) = g(x)$ នោះយើងធ្វើប្រើច្បាប់លីមីតជាបន្តបន្ទាប់។

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ ដែល n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ក្នុងការប្រើប្រាស់ច្បាប់ទាំង ៦ នៃលីមីត យើងត្រូវប្រើលក្ខណៈពិសេសពីររបស់លីមីតដូចខាងក្រោម៖

7. $\lim_{x\to a} c = c$ 8. $\lim_{x\to a} x = a$

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ ដែល n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

10. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[a]{a}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បើ n ជាចំនួនគូ នោះ $a > 0$ ។

11. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បើ nជាចំនួនគូ នោះ $f(x) > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនាតម្លៃ នៃលីមីតខាងក្រោម៖

(a). $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ (b). $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

ដំណោះស្រាយ៖

(a). $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5} 2x^2 - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4$ (តាមច្បាប់ទី២ និង ទី១)

$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$ (តាមច្បាប់ទី៣)

$= 2(5^2) - 3(5) + 4$ (តាមរូបមន្តទី៩,៨,៧)

$= 39$

(b). យើងធ្វើតាមច្បាប់ទី៥ ដើម្បីដោះស្រាយ៖

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)}\quad \text{(តាមច្បាប់ទី៥)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x^3+\lim\limits_{x\to -2}x^2-\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}5-3\lim\limits_{x\to -2}x}\quad \text{(តាមច្បាប់ទី១, ២ និង ៣)}$$

$$=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}\quad \text{(តាមរូបមន្តទី៩, ៨ និង ៧)}$$

$$=-\frac{1}{11}$$

***ចំណាំ៖** បើយើងតាងឲ្យ $f(x)=2x^2-3x+4$ នោះយើងបាន $f(5)=39$ ។ ម្យ៉ាងទៀត យើងនឹងអាចទទួលបានចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី២ (a) ដោយយក 5 ជំនួសក្នុង x។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ការជំនួសដោយផ្ទាល់គឺបានផ្តល់ចម្លើយដ៏ត្រឹមត្រូវមួយនៅក្នុងផ្នែក (b)។ អនុគមន៍នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី២ វាជាប្រភេទអនុគមន៍ពហុធា និងអនុគមន៍សនិទានដែលមានភាពត្រឹមត្រូវរៀងៗខ្លួន ហើយវាស្រដៀងគ្នា នឹងការប្រើច្បាប់លីមីត ដែលអាចធ្វើការជំនួសដោយផ្ទាល់បាន (មើលក្នុងលំហាត់ទី55 និង 56)។

លក្ខណៈនៃការជំនួសដោយផ្ទាល់៖ បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ពហុធា ឬ អនុគមន៍សនិទាន និង a នៅក្នុង f នោះគេបាន៖ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ រកលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ ។ យើងមិនអាចរកលីមីតដោយធ្វើការជំនួស $x=1$ បានទេ ព្រោះ $f(1)$ មិនកំណត់។ គេអាចធ្វើតាមវិធីដូចខាងក្រោម៖

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

ចំពោះ ភាគយក និង ភាគបែងមាន $x-1$ ជាកត្តារួម។ ពេលយើងឲ្យ x ខិតទៅរក 1 នោះយើងបាន $x\neq 1$ និង $x-1\neq 0$ ផងដែរ។ ដូចនេះ យើងអាចធ្វើការលប់កត្តារួមចោលរបស់ភាគយក និង ភាគបែងចោល នោះយើងអាចគណនាលីមីតដូចតទៅ៖

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$=1+1=2$$

លីមីទនៃអនុគមន៍នៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះ មាននៅក្នុងផ្នែក 2.1 គឺនៅពេលដែលយើងព្យាយាមរកតង់សង់នៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ត្រង់ចំណុច $(1,1)$ ។

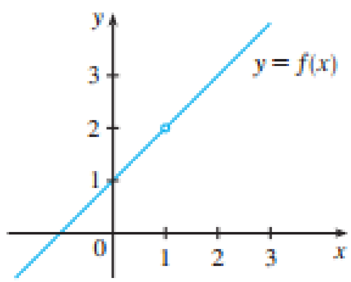
ចំណាំ៖ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៣ យើងអាចធ្វើការគណនាលីមីតដោយធ្វើការជំនួសទៅក្នុងអនុគមន៍ $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ បានធម្មតានិងចំពោះ អនុគមន៍ $g(x)=x+1$ ក៏មានលីមីតដូចគ្នាដែរ។ វាពិតជាត្រឹមត្រូវព្រោះ $f(x)=g(x)$ នៅពេល $x=1$ ហើយនៅក្នុងការគណនាលីមីតពេល x ខិតទៅរក 1 គឺយើងមិនអាចឲ្យ x ស្មើ 1 បានទេ។ តាមខាងលើគេកំណត់បានជាទូទៅដូចខាងក្រោម៖

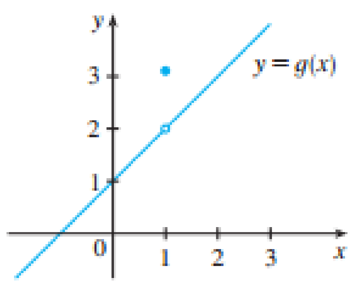
បើ $f(x)=g(x)$ ដែល $x\neq a$ នោះគេបាន៖ $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ រកលីមីត $\lim_{x\to 1}g(x)$ ដែល $g(x)=\begin{cases}x+\pi & \text{បើ } x\neq 1\\ \pi & \text{បើ } x=1\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន g ដែលកំណត់ដោយ $x=1$ និង $g(x)=\pi$ ប៉ុន្តែតម្លៃនៃលីមីតពេលវាខិតទៅរក 1 នោះមិនមែនមានន័យថា តម្លៃនៃអនុគមន៍ស្មើ 1 ដែរនោះទេ។ ដោយ $g(x)=x+1$ ចំពោះ $x\neq 1$ គេបាន៖ $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)$ ។

ត្រូវចាំថា ចំពោះតម្លៃនៃអនុគមន៍នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៣ និង ទី៤ គឺដូចគ្នានៅពេលដែល $x=1$ (រូបទី ២) នាំឲ្យអនុគមន៍មានលីមីតដូចគ្នាពេល x ខិតទៅរក 1។





(រូបទី២)

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ គណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $F(h)=\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

ដូចឧទាហរណ៍ទី៣ ដែរ យើងមិនអាចគណនាតម្លៃលីមីត $\lim_{h\to 0}F(h)$ ដោយឲ្យ $h=0$ បានទេ ព្រោះ មិនកំណត់។ ប៉ុន្តែ បើយើងធ្វើ $F(h)$ តាមវិធីពិជគណិតធម្មតានោះគេបាន៖

$$F(h)=\frac{(3+h)^2-9}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h$$

ចំពោះ $h\neq 0$ ពេល h ខិតទៅរក 0 គេបាន៖

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦៖ គណនាលីមីត $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-9}{t^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ យើងមិនអាចគណនាតាម លីមីតនៃផលចែកបានទេ ព្រោះ ភាគបែងនៃអនុគមន៍គឺ 0 ។

គេបាន៖ $$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-9}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-9}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+9}+9}{\sqrt{t^2+9}+9}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t^2+9)-9}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{(\sqrt{t^2+9}+3)}$$

$$=\frac{1}{\lim_{t\to 0}t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$$

$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

លីមីតមួយចំនួនអាចគណនាបានយ៉ាងងាយបំផុត ដោយគ្រាន់តែរកតម្លៃលីមីតដែលនៅផ្នែកខាងឆ្វេង និង ខាងស្តាំប៉ុណ្ណោះ។ ចំពោះទ្រឹស្តីខាងក្រោមគឺត្រូវចាំ ដែលរកឃើញនៅក្នុងផ្នែកទី 2.2។ ទ្រឹស្តីបទនោះ ពោលថា បើលីមីតផ្នែកខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំស្មើគ្នា នោះវាមានលីមីត។

ទ្រឹស្តីបទ៖ $\lim_{x\to a}f(x)=L$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to a^-}f(x)=L=\lim_{x\to a^+}f(x)$ ។

យើងអាចប្រើច្បាប់លីមីត ក្នុងការគណនាលីមីតនៅផ្នែកខាងឆ្វេង និង ស្តាំបាន។

ឧទាហរណ៍ទី៧៖ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}|x|=0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ យើងមាន $|x| = \begin{cases} x & \text{បើ } x \ge 0 \\ -x & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$

ដោយ $|x| = x$ ចំពោះ $x > 0$ គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

ចំពោះ $x > 0$ នោះ$|x| = -x$ គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$

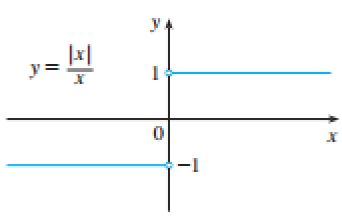
ដូចនេះតាមទ្រស្តីបទទី១ គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨៖ បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ គ្មានលីមីត។

ដំណោះស្រាយ៖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$$

ដោយលីមីតផ្នែកខាងឆ្វេង និង ខាងស្តាំមិនស្មើគ្នា នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី១ គឺ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ គ្មានលីមីតទេ។ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x) = |x|/x$ ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី៤ ដោយបញ្ជាក់ពីលីមីតទាំងសងខាងដែលយើងបានរក។



(រូបទី៤)

ឧទាហរណ៍ទី៩៖ បើគេមាន $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{ចំពោះ } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{ចំពោះ } x < 4 \end{cases}$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃលីមីត $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ។

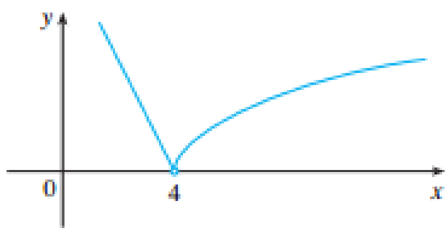
ដំណោះស្រាយ៖ ដោយ $f(x) = \sqrt{x-4}$ ចំពោះ $x > 4$

យើងបាន៖ $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$

ហើយ $f(x) = 8-2x$ ចំពោះ $x < 4$

យើងបាន៖ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}(8-2x) = 8-2\cdot 4 = 0$

ដោយលីមីតនៅផ្នែកខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំមានតម្លៃស្មើគ្នានោះ $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$ (ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី៥)។

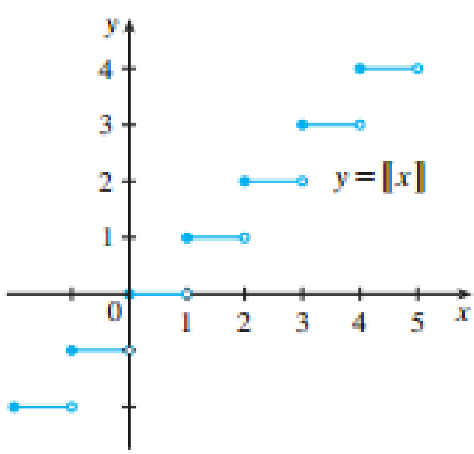


(រូបទី៥)

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ អនុគមន៍ផ្នែកគត់ដែលកំណត់ដោយ $[[x]]$ ស្មើនឹង ចំនួនគត់ធំបំផុតដែលវាអាចតិចជាង ឬ ស្មើ x ។ (ឧបមាថា $[[4]]=4,[[4.8]]=4,[[\pi]]=3,[[\sqrt{2}]]=1,[[-\frac{1}{2}]]=-1$)។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 3}[[x]]$ គ្មានលីមីត។

ដំណោះស្រាយ៖ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ផ្នែកគត់ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី៦។

(រូបទី៦)



ដោយ $[[x]]=3$ ចំពោះ $3\le x\le 4$ យើងបាន៖

$\lim\limits_{x\to 3^+}[[xx]]=\lim\limits_{x\to 3^+}3=3$

ហើយ $[[x]]=2$ ចំពោះ $2\le x\le 3$ យើងបាន៖

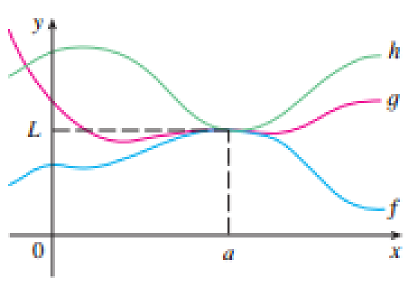
$\lim\limits_{x\to 3^-}[[x]]=\lim\limits_{x\to 3^-}2=2$ ។ ដោយលីមីតនៅផ្នែកខាងឆ្វេង

និងខាងស្តាំមិនស្មើគ្នា នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី១ $\lim\limits_{x\to 3}[[x]]$ គ្មានលីមីតទេ។

46. **ទ្រឹស្តីបទ៖** បើ $f(x)\le g(x)$ នៅពេលដែល x ខិតទៅរក a (តែវាមិនស្មើ a នោះទេ) និង អនុគមន៍ទាំងពីរខិតទៅរក a គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$ ។

47. **ទ្រឹស្តីលីមីតអម** បើ $f(x)\le g(x)\le h(x)$ ពេល ខិតទៅរក (តែវាមិនអាចស្មើ នោះទេ) និង $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$ នោះយើងបាន៖ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ ។

ទ្រឹស្តីលីមីតអមត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម (រូបទី៧)៖

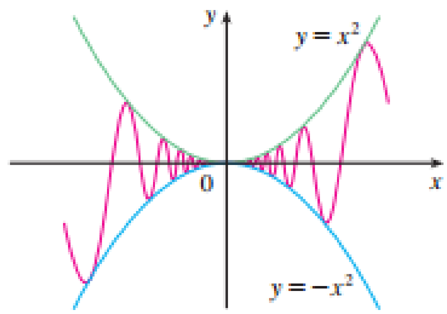


(រូបទី៧)

ឧទាហរណ៍ទី១១៖ បង្ហាញថា លីមីត $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ យើងមិនអាចធ្វើការគណនាលីមីតតាម $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ បានទេ ព្រោះ

$\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ គ្មានលីមីតទេ (មើលក្នុងឧទាហរណ៍ទី៤ផ្នែក 2.2)។ ផ្ទុយទៅវិញ យើងត្រូវរកអនុគមន៍ f ដែលតូចជាង $g(x)=x^2\sin(1/x)$ ហើយអនុគមន៍ h ត្រូវធំជាង g ដែលអនុគមន៍ $f(x)$ និង $h(x)$ ខិតទៅរក 0។ ដើម្បីធ្វើរបៀបនេះយើងត្រូវប្រើចំណេះដឹងរបស់យើងអំពីអនុគមន៍ស៊ីនុសព្រោះដែនកំណត់នៃស៊ីនុសស្ថិតនៅចន្លោះ -1 និង 1។ គេបាន $-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$ ។ វិសមភាពនេះវាពិតនៅពេលដែលយើងគុណនឹងចំនួនគត់



(រូបទី៨)

វិជ្ជមានយើង។ ដឹងថា $x^2\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ x នោះយើងយកវិសមភាពនេះទៅគុណនឹង x^2 យើងបាន៖ $-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$ ។

តាមរូបទី៨ យើងបាន៖　　$\lim_{x\to 0}x^2=0$ និង $\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$

ដោយ $f(x)=-x^2, g(x)=x^2\sin(1/x)$ និង $h(x)=x^2$ នោះតាមទ្រឹស្តី

លីមីតអម យើងបាន៖

$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ ។

លំហាត់

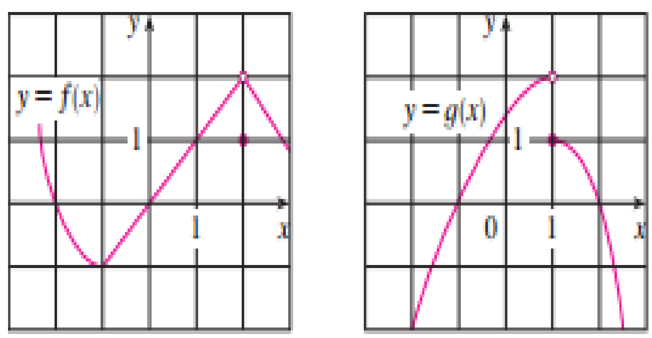
1. គេឲ្យលីមីត៖ $\lim_{x\to 2}f(x)=4$,　　$\lim_{x\to 2}g(x)=-2$, $\lim_{x\to 2}h(x)=0$ ។ ចូររកលីមីត និងបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា ករណីវាគ្មានលីមីត៖

(a). $\lim_{x\to 2}[f(x)+5g(x)]$ (b). $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

(c). $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ (d). $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e). $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f). $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$ ។

2. គេឲ្យក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f និង g ។ ចូរប្រើក្រាហ្វទាំងពីរនោះ ដើម្បីគណនាតម្លៃលីមីត និងបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា ករណីវាគ្មានលីមីត៖



(a). $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$ (b). $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$

(c). $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ (d). $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e). $\lim_{x\to 2}[x^3 f(x)]$ (f). $\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$ ។

3. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim_{x\to 3}(5x^3-3x^2+x-6)$ ។

4. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim_{x\to -1}(x^4-3x)(x^2+5x+3)$ ។

5. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{t^4-2}{2t^2-3t+2}$ ។

6. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$ ។

7. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim\limits_{x\to 8}(1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3)$ ។

8. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{t^2-2}{t^3-3t+5})^2$ ។

9. គណនាតម្លៃលីមីត ដោយបង្ហាញពីភាពត្រឹមត្រូវតាមជំហាននីមួយៗដោយប្រាប់ពីច្បាប់របស់វាផង៖ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{3x-2}}$ ។

10. ក). តើមានអ្វីខុស ចំពោះសមីការ $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=x+2$?

ខ). តាមសំនួរ (a) ហេតុអ្វីបានជា $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)$ ពិត ?

11. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$ ។

12. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$ ។

13. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+6}{x-5}$ ។

14. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$ ។

15. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{t\to -3}\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$ ។

16. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$ ។

17. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-5+h)^2-25}{h}$ ។

18. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$ ។

19. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$ ។

20. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^4-1}{t^3-1}$ ។

21. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ ។

22. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$ ។

23. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$ ។

24. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$ ។

25. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$ ។

26. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{ht\to 0}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t})$ ។

27. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ ។

28. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$ ។

29. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t})$ ។

30. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$ ។

31. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ។

32. គណនាតម្លៃលីមីត៖ $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$ ។

33. ក). ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=x/\sqrt{1+3x-1}$ ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីត៖

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x-1}}$ ។

ខ). ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីតដោយបង្កើតតារាងតម្លៃលេខនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល ខិតទៅ រក 0 ។

គ). ចូរប្រើច្បាប់លីមីត ដើម្បីបង្ហាញថាការទស្សន៍ទាយចម្លើយរបស់អ្នកត្រឹមត្រូវ។

34. ក). គណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 0}f(x)$ (យកចំនួនទសភាគក្រោយក្បៀសពីរខ្ទង់) ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ ។

ខ). ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីត(យកចំនួនទសភាគក្រោយក្បៀសបួនខ្ទង់) ដោយបង្កើតតារាងតម្លៃលេខនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ). ចូរប្រើច្បាប់លីមីត ដើម្បរកចម្លើយពិតប្រាកដរបស់លីមីត ។

35. ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទលីមីតអម ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}(x^2\cos 20\pi x)=0$ ។ ចូរពន្យល់ដោយការសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=-x^2, g(x)=x^2\cos 20\pi x$ និង $h(x)=x^2$ នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។

36. ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទលីមីតអម ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}=0$ ។ ចូរពន្យល់ដោយការសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f,g និង h នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។

37. ចូររកលីមីត $\lim_{x\to 4}f(x)$ បើ $4x-9\le f(x)\le x^2-4x+7$ ចំពោះ $x\ge 0$ ។

38. ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 1}g(x)$ បើ $2x\le g(x)\le x^4-x^2+2$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

39. ចូរបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}x^4\cos\dfrac{2}{x}=0$ ។

40. ចូរបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)}=0$ ។

41. ចូររកតម្លៃនៃលីមីត។ ប្រសិនបើគ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ដោយបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា៖

$\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)$ ។

42. ចូររកតម្លៃនៃលីមីត។ ប្រសិនបើគ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ដោយបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា៖

$\lim_{x\to -6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$ ។

43. ចូររកតម្លៃនៃលីមីត។ ប្រសិនបើគ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ដោយបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា៖

$\lim_{x\to 0.5^-}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$ ។

44. ចូររកតម្លៃនៃលីមីត។ ប្រសិនបើគ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ដោយបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា៖

$\lim_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+x}$ ។

45. ចូររកតម្លៃនៃលីមីត។ ប្រសិនបើគ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ដោយបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា៖

$\lim_{x\to 0^-}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|})$ ។

46. ចូររកតម្លៃនៃលីមីត។ ប្រសិនបើគ្មានលីមីត ចូរពន្យល់ដោយបញ្ជាក់ពីមូលហេតុរបស់វា៖

$\lim_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|})$ ។

47. អនុគមន៍មួយ កំណត់សរសេរដោយ sgn វាត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$\text{sgn}=\begin{cases}-1 & \text{បើ } x<0\\ 0 & \text{បើ } x=0\\ 1 & \text{បើ } x>0\end{cases}$$

(a). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍នេះ។

(b). ចូររកតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម ដោយពន្យល់ពីមូលហេតុ ករណីវាគ្មានលីមីត៖

(i). $\lim_{x\to 0^+}\text{sgn}\,x$ (ii). $\lim_{x\to 0^-}\text{sgn}$

(iii). $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ (iv). $\lim_{x\to 0}|\operatorname{sgn} x|$ ។

48. គេឲ្យ៖

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{បើ } x<1 \\ (x-2)^2 & \text{បើ } x\geq 1 \end{cases}$$ ។

ក). ចូររកលីមីត $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ និង $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ។

ខ). តើ $\lim_{x\to 1} f(x)$ មានលីមីតដែរឬទេ?

គ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

49. គេឲ្យអនុគមន៍៖ $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$ ។

ក). ចូររកតម្លៃនៃលីមីត៖ (i). $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (ii). $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ ។

ខ). តើ $\lim_{x\to 2} g(x)$ មានលីមីតដែរឬទេ?

គ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ g ។

50. គេឲ្យអនុគមន៍៖

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{បើ } x<1 \\ 3 & \text{បើ } x=1 \\ 2-x^2 & \text{បើ } 1<x\leq 2 \\ x-3 & \text{បើ } x>2 \end{cases}$$

ក). ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

(i). $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii). $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii). $g(1)$

(iv). $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v). $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi). $\lim_{x\to 2} g(x)$ ។

ខ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

51. ក). បើ $[[\,]]$ សម្គាល់ទៅលើអនុគមន៍ផ្នែកគត់។ ចូរគណនាៈ

(i). $\lim_{x\to -2^+}[[x]]$ (ii). $\lim_{x\to -2}[[x]]$ (iii). $\lim_{x\to -2.4}[[x]]$ ។

ខ). បើ n ជាចំនួនគត់ ចូរគណនាតម្លៃៈ

(i). $\lim_{x\to n^-}[[x]]$ (ii). $\lim_{x\to n^+}[[x]]$ ។

គ). ចំពោះតម្លៃ a តើ $\lim_{x\to a}[[x]]$ មានតម្លៃស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

52. គេឲ្យអនុគមន៍ៈ $f(x)=[[\cos x]], -\pi\le x\le\pi$ ។

ក). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

ខ). ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោមៈ

(i). $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii). $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii). $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv). $\lim_{x\to (\pi/2)} f(x)$ ។

គ). ចំពោះតម្លៃ a តើ $\lim_{x\to a} f(x)$ មានតម្លៃស្មើនឹងប៉ុន្មាន?

53. បើ $f(x)=[[x]]+[[-x]]$ ចូរបង្ហាញថា $\lim_{x\to 2} f(x)$ មានលីមីត ប៉ុន្តែវាមិនស្មើនឹង $f(2)$ ។

54. តាមទ្រឹស្តីធៀប រូបមន្តភាពរួញរបស់ឡូរិនគឺៈ $L=L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$ ។ បញ្ជាក់ថាប្រវែងនៃវត្ថុ L ជាអនុគមន៍នៃល្បឿន v របស់វាទៅអ្នកសង្កេត ដែល l_0 គឺជាប្រវែងដើមនៃវត្ថុ និង c ជាល្បឿនពន្លឺ ។ ចូររកលីមីត $\lim_{v\to c^-} L$ និង បកស្រាយពីលទ្ធផលរបស់វា។ តើហេតុអ្វីបានជាលីមីតខាងឆ្វេង មានសារៈសំខាន់?

55. បើ p ជាអនុគមន៍ពហុធា ចូរបង្ហាញថា $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ ។

56. បើ r ជាអនុគមន៍សនិទាន ចូរប្រើលំហាត់ទី 55 ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to a}(x) = r(a)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ a ដែលមាននៅក្នុងដែនកំណត់របស់ r ។

57. បើ $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-8}{x-1} = 10$ ។ ចូររកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 1} f(x)$ ។

58. បើ $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 5$ ។ ចូររកតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

(a). $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b). $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ។

59. បើគេឲ្យ៖

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនសនិទាន} \\ 0 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនអសនិទាន} \end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ។

60. គណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ ។

61. តើ $\lim_{x\to -2}\dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ មានលីមីតដែររឺទេ ? បើមានចូររកតម្លៃ a និងតម្លៃនៃលីមីតនោះ។

62. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីរង្វង់ថេរ C_1 មួយដែលមានសមីការ $(x-1)^2 + y^2 = 1$ និង រង្វង់រួញខ្លី C_2 មួយដែលមានកាំ r ពីចំណុចកណ្តាលនៃផ្ចិត។ ចំណុច $P\ (O,r)$ ហើយ Q ជាចំណុចនៅខាងលើនៃរង្វង់ដែលកាត់គ្នាទាំងពីរ និង R ជាចំណុចដែលកាត់បន្ទាត់ PQ លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស x ។ តើមានអ្វីកើតឡើងចំពោះ R និង រង្វង់រួញខ្លី C_2 នៅពេល $r\to 0^+$?

២.៤. និយមន័យលីមីត

និយមន័យលីមីតត្រូវបានផ្តល់ឲ្យម្តងមកហើយនៅក្នុងចំណុច 2.2 ប៉ុន្តែវាមិនទាន់ច្បាស់លាស់ និងគ្រាប់ជ្រុងជ្រោយនៅឡើយទេ ព្រោះនៅពេលដែល x ខិតទៅរក 2 និង $f(x)$ ខិតទៅរក L គឺវាមានភាពមិនច្បាស់លាស់។ គេកំណត់សរសេរវាដោយ៖

$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{cos5x}{10,000}\right)=0.0001$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ។

យើងចាំបាច់ត្រូវកំណត់និយមន័យរបស់លីមីតឲ្យបានច្បាស់លាស់។ ដើម្បីធ្វើឲ្យនិយមន័យលីមីតបានច្បាស់លាស់ យើងពិចារណាលើអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{បើ } x\neq 3\\ 6 & \text{បើ } x=3\end{cases}$$

ពិតណាស់នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 3 ប៉ុន្តែ $x\neq 3$ ហើយ $f(x)$ ខិតទៅ 5 នោះវាធ្វើឲ្យ $\lim_{x\to 3}f(x)=5$ ។

ដើម្បីទទួលបានព័ត៏មានលម្អិតឲ្យបានកាន់តែច្បាស់ពីភាពខុសគ្នានៅពេលដែល x ខិតទៅរក 3 យើងត្រូវសួរសំណួរដូចខាងក្រោម៖

តើត្រូវធ្វើដូចម្តេចដើម្បីឲ្យ x ខិតទៅរក 3 ហើយតម្លៃនៃ $f(x)$ ខុសពី 5 ដោយតម្លៃវាតិចជាងគ្នា 0.1?

គម្លាតគ្នាពី x ទៅ 3 គឺ $|x-3|$ និង គម្លាតពី $f(x)$ ទៅ 5 គឺ $|f(x)-5|$។ ដូចនេះយើងត្រូវរកតម្លៃ δ ដែល៖ $|f(x)-5|<0.1$ បើ $|x-3|<\delta$ ប៉ុន្តែ $x\neq 3$ ។

បើ $|x-3|>0$ ហើយ $x\neq 3$ នោះយើងអាចធ្វើការកំណត់តម្លៃ δ បានថា៖

$|f(x)-5|<0.1$ បើ $0<|x-3|<\delta$ ។ ប៉ុន្តែត្រូវចាំថាបើ $0<|x-3|(0.1)/2=0.05$ គេបាន៖

$|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|<2(0.05)=0.1$

ដែល $|f(x)-5|<0.1$ បើ $0<|x-3|<0.05$ ។ ដូចនេះតម្លៃនៃ $\delta=0.05$ ដែលមានន័យថាបើ x នៅគម្លាត 3 នោះវាធ្វើ $f(x)$ នៅគម្លាត 0.1 ពី 5 ។

បើយើងដូរតម្លៃ 0.1ទៅតម្លៃ 0.01 ដោយធ្វើតាមវិធីដូចគ្នា នោះយើងអាចរកតម្លៃ $f(x)$ដែលខុសពី 5 តែវាតូចជាង 0.01 ហើយតម្លៃ x តូចជាង $(0.01)/2=0.005$ គេបាន៖

$|f(x)-5|<0.01$ បើ $0<|x-3|<0.005$ ដូចគ្នាដែរ $|f(x)-5|<0.001$ បើ $0<|x-3|<0.0005$ ។

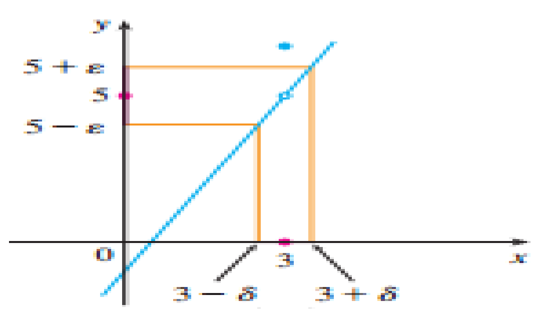
តម្លៃ 0.1 , 0.01 និង 0.001 ដែលយើងបានគិតវាគឺមានកំហុសដែលអាចទទួលយកបាន។ តម្លៃ 5 វាពិតជាត្រឹមត្រូវនៅពេលដែលលីមីតនៃ $f(x)$ ខិតទៅរក 3 ។ យើងមិនត្រឹមតែអាចយកតម្លៃពីភាពខុសគ្នារវាង $f(x)$ និង 5 ទៅតាមបីចំនួនខាងលើប៉ុណ្ណោះទេ យើងអាចយកតម្លៃវិជ្ជមានជាច្រើនទៀតបាន។ ដោយហេតុផលនេះយើងអាចសរសេរ ε (មកពីភាសាក្រិចអានថា អាប់ស៊ីឡូន) ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះយើងធ្វើការរកវាដូចមុនគេបាន៖

$\boxed{1}$ $|f(x)-5|<\delta$ បើ $0<|x-3|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ ។

វិធីដ៍ច្បាស់លាស់នេះបានពោលថា $f(x)$ ខិតទៅរក 5 នៅពេលដែល x ខិតទៅរក 5 ព្រោះតាម យើងឃើញ $\boxed{1}$ យើងអាចធ្វើការបង្កើតតម្លៃនៃ $f(x)$ ពីគម្លាត ε ទៅ 5 ដោយធ្វើការយកតម្លៃ x ក្នុងគម្លាត $\varepsilon/2$ ពី 3 ដែល $(x\neq 3)$ ។

ត្រូវចាំថា $\boxed{1}$ យើងអាចសរសេរដូចខាងក្រោម៖

បើ $3-\delta<x<3+\delta$ ដែល $(x\neq 3)$ នោះគេបាន $5-\varepsilon<f(x)<5+\varepsilon$ ។



(រូបទី១)

ដើម្បីឲ្យកាន់តែច្បាស់សូមមើលក្នុង(រូបទី១)។ ដោយធ្វើការយកតម្លៃ $(x\neq 3)$ ដែលស្ថិតលើចន្លោះ $(3-\delta,3+\delta)$ យើងអាចបង្កើតតម្លៃនៃ $f(x)$ ដែលស្ថិតលើចន្លោះ $(5-\varepsilon,5+\varepsilon)$ ។ តាម យើងអាចកំណ 1 យមន័យរបស់លីមីតបាន។

2 **និយមន័យ៖** គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់នៅចន្លោះបើកនៃចំនួន a លើកលែង a ចេញ។ នោះគេអាចនិយាយបានថា **លីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ស្មើនឹងតម្លៃ** L ហើយគេសរសេរបានថា៖ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។ បើគ្រប់តម្លៃ $\varepsilon>0$ នោះវាធ្វើឲ្យ $\delta>0$

បើ $0<|x-a|<\delta$ នោះគេបាន $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

ដោយ $|x-a|$ គឺជាគម្លាតពី x ទៅ a និង $|f(x)-L|$ ជាគម្លាតពី $f(x)$ ទៅ L ហើយដោយ ε អាចជាចំនួនដ៏តូច។ និយមន័យរបស់លីមីតអាចបញ្ជាក់ដូចខាងក្រោម៖

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ បានន័យថាគម្លាតរវាង $f(x)$ និង L អាចបង្កើតបានជាចំនួនដ៏តូចមួយដោយធ្វើការគម្លាតពី x ទៅ a តូចល្មម (ប៉ុន្តែវាខុសពី 0)។

ផ្ទុយទៅវិញ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ មានន័យថាតម្លៃនៃ $f(x)$ អាចធ្វើឲ្យវាខិតទៅរក L ដោយធ្វើការយក x ខិតទៅជិត a (ប៉ុន្តែវាមិនស្មើ a នោះទេ)។

យើងអាចធ្វើការកំណត់រូបមន្តឡើងវិញក្នុងនិយមន័យ ែ 2 ទាក់ទងទៅនឹងចន្លោះណាមួយដោយសង្កេតទៅលើវិសមភាព $|x-a|<\delta$ សមមូលនឹង $-\delta<x-a<\delta$ ។ យើងអាចធ្វើការសរសេរបានថា $a-\delta<x<a+\delta$ ។ ហើយ $0<|x-a|<\delta$ ពិតផងដែរ កាលណា $x-a\neq 0$ ដែល $x\neq a$។ ដូចគ្នាដែរចំពោះវិសមីការ $|f(x)-L|<L$ សមមូលនឹង $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$។ ដូចនេះ តាមទំនាក់ទំនងនៅចន្លោះ នោះនិយមន័យ អាចពោលដូចខាងក្រោម៖ 2

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ មានន័យថា គ្រប់ $\varepsilon>0$ (មិនថា ε តូចប៉ុណ្ណានោះទេ) យើងអាចរកតម្លៃ $\delta>0$ បានបើ x វាស្ថិតនៅចន្លោះបើក $(a-\delta,a+\delta)$ ដែល $x\neq a$ ហើយវាធ្វើឲ្យ $f(x)$ ស្ថិតនៅចន្លោះបើក $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ ។

យើងអាចធ្វើការបកស្រាយនិយមន័យខាងលើនេះដោយធ្វើការជំនួសអនុគមន៍តាមសញ្ញារបស់ដ្យាក្រាម ដូចក្នុងរូបទី២ ដែល f សំណុំរង□ ទៅលើសំណុំរងផ្សេងទៀតរបស់□ ។

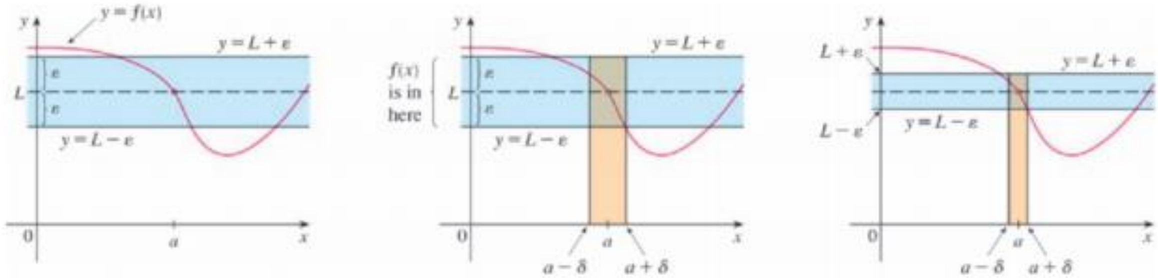
(រូបទី២)

និយមន័យលីមីតបានពោលថាបើតម្លៃតូចជាច្រើននៅចន្លោះបើក $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ វាបានផ្តល់ឲ្យតម្លៃនោះជុំវិញ L នោះយើងអាចរកចន្លោះ $(a-\delta, a+\delta)$ នៅជុំវិញតម្លៃ a ដូចដែល f ជាផែនទីនៅគ្រប់ចំណុច $(a-\delta, a+\delta)$ (លើងលែង a) ទៅចន្លោះ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ (មើលក្នុងរូបទី៣)។

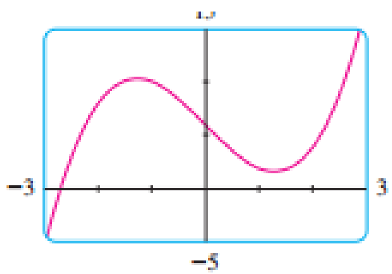
(រូបទី៣)

បំណកស្រាយផ្សេងទៀតនៃលីមីតអាចធ្វើការបង្ហាញតាមក្រាហ្វនៃអនុគមន៍។ បើគេឲ្យ $\varepsilon > 0$ នោះយើងអាចធ្វើការគូសបន្ទាត់ដេក $y = L+\varepsilon$ និង $y = L-\varepsilon$ និងក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f មាននៅក្នុងរូបទី៤។ បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ នោះយើងអាចរកចំនួន $\delta > 0$ បើយើងឲ្យ x នៅចន្លោះ $(a-\delta, a+\delta)$ ដែល $x \neq a$។ ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ មាននៅចន្លោះរវាងបន្ទាត់ $y = L-\varepsilon$ និង $y = L+\varepsilon$ (មើលក្នុងរូបទី៥)។ អ្នកអាចមើលថា បើ δ ដែលបានរកឃើញនោះតម្លៃដ៍តូចនៃ δ គឺពិតជាត្រឹមត្រូវ។ វាមានសារៈសំខាន់ដើម្បីយល់បានពីដំណើការបកស្រាយ ដែលបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី៤ និង ទី ៥ ដែលវាពិតជាត្រឹមត្រូវគ្រប់ ε ដែលជាចំនួនវិជ្ជមានទោះវាតូចប៉ុណ្ណាក៏ដោយ។ រូបទី៦ បង្ហាញថាបើតម្លៃដ៍តូចនៃ ε ត្រូវបានជ្រើសរើសយក នោះតម្លៃ ε ពិតជាចាំបាច់។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ដើម្បីរកតម្លៃ δ ដែល៖



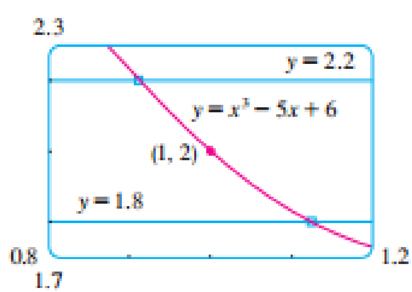
បើ $|x-1|<\delta$ នោះ $|(x^3-5x+6)-2|<0.2$ ។ ម៉្យាងទៀតចូររកតម្លៃ δ ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\varepsilon=0.2$ តាម និយមន័យនៃលីមីតចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=x^3-5x+6$ ដែល $a=1$ និង $L=2$ ។



ដំណោះស្រាយ៖ ក្នុងក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f នៃរូបទី៧ ធ្វើឲ្យយើងមានការចាប់អារម្មណ៍លើតំបន់ក្បែរ ចំណុច $(1,2)$ ។នោះយើងបាន៖

$|(x^3-5x+6)-2|<0.2$ នោះ $1.8<x^3-5x+6<2.2$

យើងត្រូវកំណត់តម្លៃនៃ x ចំពោះខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $y=x^3-5x+6$ ដែលវាស្ថិតនៅចន្លោះបន្ទាត់ដេក $y=1.8$ និង $y=2.2$ ។ ដូចក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y=x^3-5x+6$, $y=1.8$ និង $y=2.2$ នៅក្បែរចំណុច $(1,2)$ គឺ ដូចនៅក្នុងរូបទី៨។



ក្រោយមកយើងប្រើទ្រនិចដើម្បីទស្សន៍ទាយថា កូអរដោនេ x នៃចំណុចប្រសព្វរបស់បន្ទាត់ $y=2.2$ និងខ្សែកោង $y=x^3-5x+6$ គឺប្រហែល 0.911។ ដូចគ្នាដែរ $y=x^3-5x+6$ កាត់បន្ទាត់ $y=1.8$ នៅពេលដែល $x\approx\sim 1.124$ ។ ដូចនេះយើងបាន៖

បើ $0.92<x<1.12$ នោះ $1.8<x^3-5x+6<2.2$ ។

នៅចន្លោះ $(0.92,1.12)$ វាគឺមិនស៊ីមេទ្រីពេល $x=1$ ទេ។ គម្លាតពី $x=1$ ទៅចំណុចខាងឆ្វេងបង្អស់គឺ $1-0.92=0.08$ និងគម្លាតទៅខាងស្តាំបង្អស់គឺ 0.12 ។ យើងអាចធ្វើការជ្រើសរើស δ ដែលតូចក្នុងចំនួននេះគឺ $\delta=0.08$ ។ នោះយើងបាន៖

បើ $|x-1|<0.08$ នោះ $|(x^3-5x+6)-2|<0.2$ ។

នេះគ្រាន់តែនិយាយថាដោយយក x ស្មើ 0.08 នៃ 1 នោះយើងអាចយក $f(x)$ ស្មើ 0.2នៃ 0.2បាន។ ទោះបីជាយើងយក $\delta=0.08$ ក៏ដោយតែវានៅតែត្រឹមត្រូវជានិច្ចចំពោះតម្លៃ δ ដែលមានតម្លៃដ៏តូច។

ក្រាហ្វនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី១ បានផ្តល់នូវការបកស្រាយពីនិយមន័យដែល $\varepsilon=0.2$ ប៉ុន្តែវាមិនបានបញ្ជាក់ថាតម្លៃនៃលីមីតស្មើ 2 នោះទេ តែវាបានបញ្ជាក់ថាដោយបានឲ្យតម្លៃ δ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ ε ។ ក្នុងការបញ្ជាក់ពីពំនោលខាងលើ វាពិតជាមានប្រយោជន៍ក្នុងការគិតអំពីនិយមន័យរបស់លីមីតដែលវាអាចមានបញ្ហាប្រឈមខ្លះៗ។ យើងសាកស្រមៃការប្រកួតប្រជែងរវាងមនុស្សពីនាក់ A និង B ហើយចាត់ទុកខ្លួនអ្នកជា B ។ បុគ្គល A ចាត់ទុកជាចំនួនថេរដែលត្រូវបានប៉ាន់ប្រមាណដោយតម្លៃនៃ $f(x)$ ឲ្យត្រូវនឹងតម្លៃ ε ។

បុគ្គល B ចាត់ទុកជាចំនួន δ នោះ បើ $0<|x-a|<\delta$ នោះ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។ ការណ៍នេះវាបានធ្វើឲ្យតម្លៃរបស់ A កាន់តែមានភាពជាក់លាក់ និង B តម្លៃកាន់តែតូចទៅតាមតម្លៃនៃ ε ។គេកំណត់សរសេរបាន៖

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ 1. ឲ្យ ε ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ យើងរកតម្លៃនៃ δ ដែល៖

បើ $0<|x-3|<\delta$ នោះ $|(4x-5)-7|<\varepsilon$

តែ $|(4x-5)-7|=|4x-12|=|4(x-3)|=4|x-3|$ នោះគេបានតម្លៃ δ ៖

បើ $0<|x-3|<\delta$ នោះ $4|x-3|<\varepsilon$

បើ $0<|x-3|<\delta$ នោះ $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

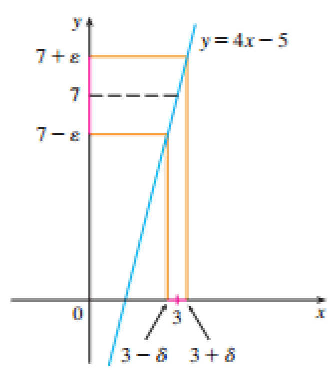
គេបាន $\delta=\varepsilon/4$ ។

2. យើងឲ្យ $\varepsilon>0$ ហើយ $\delta=\varepsilon/4$ ។ បើ $0<|x-3|<\delta$ គេបាន៖

$$|(4x-5)-7|=|4x-12|=|4(x-3)|=4|x-3|<4\delta=4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon$$

នាំឲ្យ បើ $0<|x-3|<\delta$ នោះ $|(4x-5)-7|<\varepsilon$

ដូចនេះតាមនិយមន័យនៃលីមីតគេបាន $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$ ។ (សូមមើលក្នុងរូបទី៩)



(រូបទី៩)

3 និយមន័យលីមីតឆ្វេង៖

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ បើគ្រប់ $\varepsilon>0$ នោះ $\delta>0$ ដែល៖

បើ $a-\delta<x<a$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$

4 និយមន័យលីមីតស្តាំ៖

$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ បើគ្រប់ $\varepsilon>0$ នោះ $\delta>0$ ដែល៖

បើ $a<x<a+\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ ចូរប្រើនិយមន័យ 4 ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ 1. យើងធ្វើការទស្សន៍ទាយតម្លៃ δ ។ ឲ្យតម្លៃ ε ជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយ $a=0$ និង $L=0$ នោះយើងបានតម្លៃ ε ដែលត្រូវរកគឺ៖

បើ $0<x<\delta$ នោះ $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$

នោះគេបាន បើ $0<x<\delta$ នោះ $\sqrt{x}<\varepsilon$

បើលើកអង្គសងខាងនៃវិសមភាព $\sqrt{x}<\varepsilon$ ជាការេគេបាន៖

បើ $0<x<\delta$ នោះ $x<\varepsilon^2$

តាមខាងលើគេបាន $\delta=\varepsilon^2$ ។

2. យើងឲ្យ $\delta>0$ តាង $\delta=\varepsilon^2$ បើ $0<x<\delta$ គេបាន៖

$\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$ នាំឲ្យ $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$ ។

តាមនិយមន័យ 4 នោះគេបាន $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 3}x^2=9$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ 1. យើងធ្វើការទស្សន៍ទាយតម្លៃ $|x-3|<1$ ។ ឲ្យតម្លៃ ε ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ យើងត្រូវរកតម្លៃ $\delta>0$ នោះយើងបាន៖

បើ $0<|x-3|<\delta$ នោះ $|x^2-9|<\varepsilon$

ដើម្បីភ្ជាប់ទំនាក់ទំនង $|x^2-9|$ ជាមួយ $|x-3|$ នោះយើងអាចសរសេរបានថា $|x^2-9|=|(x+3)(x-3)|$

គេបាន៖ បើ $0<|x-3|<\delta$ នាំឲ្យ $|x+3||x-3|<\varepsilon$

យើងអាចសម្គាល់ថាបើយើងអាចរកចំនួនវិជ្ជមានថេរ C ដូចជា $|x+3|<C$ គេបាន៖

$|x+3||x-3|<C|x-3|$ ហើយយើងអាចបង្កើត $C|x-3|<\varepsilon$ ដោយធ្វើការយក $|x-3|<\varepsilon/C=\delta$ ។

យើងអាចរកតម្លៃ C បើសិនជាស្ថិត x នៅចន្លោះ 3 ។ តាមពិតដោយសារតែយើងចាប់អារម្មណ៍តែទៅលើតម្លៃនៃ x ខិតទៅរក 3 អាចថាវាសមហេតុផលដើម្បីសន្មតថា x ស្ថិតនៅចន្លោះ 1 និង 3។ នាំឲ្យ $|x-3|<1$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $2<x<4$ នាំឲ្យ $5<x+3<7$ ។ ដូចនេះយើងបាន $|x+3|<7$ នោះតម្លៃ $C=7$ គឺជាចម្លើយមួយដ៏សមស្រប។ ប៉ុន្តែវាមានលក្ខខណ្ឌពីរនៅលើ $|x-3|$ គឺ៖

$|x-3|<1$ និង $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{C}=\dfrac{\varepsilon}{7}$

ដើម្បីធ្វើឲ្យលក្ខខណ្ឌទាំងពីរនៃវិសមភាពឲ្យកាន់តែច្បាស់យើងត្រូវយកតម្លៃ δ ដែលតូចនៃពីរចំនួន 1 និង $\varepsilon/7$ ។ នោះគេកំណត់បាន $\delta=\min\{1,\varepsilon/7\}$ ។

2. យើងឲ្យ $\delta>0$ និងតាង $\delta=\min\{1,\varepsilon/7\}$ ។ បើ $0<|x-3|<\delta$ ម្យ៉ាងទៀត $|x-3|<1$
$\Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow |x+3|<7$ និង $|x-3|<\varepsilon/7$ យើងបាន៖

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|<7\cdot\frac{\varepsilon}{7}=\varepsilon$$

នេះបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$ ។

វិសមភាពត្រីកោណ $|a+b| \leq |a|+|b|$

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណ៖

$\boxed{5}$ $|f(x)+g(x)-(L+M)| = |(f(x)-L)+(g(x)-M)|$

$$\leq |f(x)-L|+|g(x)-M|$$

យើងបង្កើត $|f(x)+g(x)-(L+M)|$ តូចជាង ε ដោយធ្វើការយកតាម $|f(x)-L|$ និង $|g(x)-M|$ ប៉ុន្តែតូចជាង $\varepsilon/2$ ។

ដោយ $\varepsilon/2>0$ និង $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ មានចំនួន $\delta_1>0$ ដែល៖

បើ $0<|x-a|<\delta_1$ នោះ $|f(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

ស្រដៀងគ្នាដែរដោយ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ មានចំនួន $\delta_2>0$ ដែល៖

បើ $0<|x-a|<\delta_2$ នោះ $|g(x)-M|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

តាង $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ គឺជាតម្លៃតូចបំផុតនៃ δ_1 និង δ_2 ។ នោះយើងអាចសម្គាល់បានថា៖

បើ $0<|x-a|<\delta$ ហើយ $0<|x-a|<\delta_1$ និង $0<|x-a|<\delta_2$

គេបាន៖ $|f(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ និង $|g(x)-M|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ ។

ដូច្នេះតាម $\boxed{5}$ គេបាន៖ $|f(x)+g(x)-(L+M)| \leq |f(x)-L|+|g(x)-M|$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

យើងធ្វើការសង្ខេបឡើងវិញ៖

បើ $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)+g(x)-(L+M)|<\varepsilon$

ដូចនេះតាមនិយមន័យរបស់លីមីតគេបាន៖

$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$

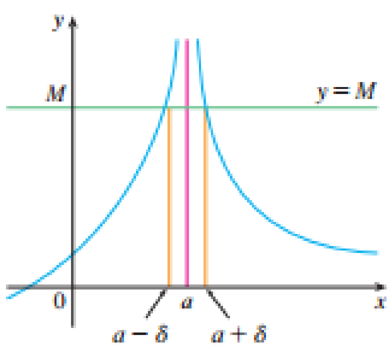
លីមីតអនន្ត

លីមីតអនន្តអាចកំណត់បានវិធីដ៏ច្បាស់លាស់បានផងដែរ។

6 **និយមន័យ៖** តាង f ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់នៅចន្លោះបើកនៃតម្លៃ a លើកលែងតម្លៃ a ខ្លួនវាចេញ នោះគេបាន៖ $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ។ មានន័យថាគ្រប់តម្លៃវិជ្ជមាន M វាគឺមានចំនួនវិជ្ជមាន δ ដែល៖

បើ $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។

និយមន័យនេះចង់និយាយថា តម្លៃនៃ $f(x)$ អាចធ្វើឲ្យធំតាមចិត្តរបស់យើង (ធំជាងតម្លៃ M ដែលបានផ្តល់ឲ្យ) ដោយកំណត់យក x ខិតទៅរក a តែ $x\neq a$ (មើលរូបទី១០)។ គេឲ្យបន្ទាត់ដេក $y=M$ យើងអាចរកតម្លៃ $\delta>0$ ហើយយក x ស្ថិតនៅចន្លោះ $(a-\delta,a+\delta)$ តែ $x\neq a$ នោះយើងបានខ្សែកោង $y=f(x)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $y=M$ ។ បើតម្លៃត្រូវបានកំណត់យកនោះតម្លៃ δ ដ៏តូចគឺពិតជាត្រឹមត្រូវ។



(រូបទី១០)

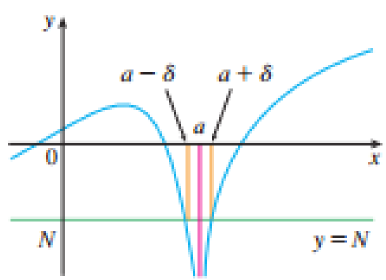
ឧទាហរណ៍៖ ចូរប្រើនិយមន័យ 6 ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ តាង M ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ យើងរកតម្លៃនៃចំនួនδ ដែល៖

បើ $0<|x|<\delta$ និង $\frac{1}{x^2}>M$

ដោយ $\frac{1}{x^2}>M \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{M} \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$

ដូចនេះបើយើងយក $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ និង $0<|x|<\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ នាំឲ្យ $\frac{1}{x^2}>M$ ។ នេះបង្ហាញថា $\frac{1}{x^2}\to\infty$ ដូច $x\to 0$ ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ខាងក្រោមនេះបង្ហាញយ៉ាងច្បាស់ពីរបៀបបកស្រាយអំពីនិយមន័យទី៥ក្នុងផ្នែក 2.2 ដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី១១។



(រូបទី១១)

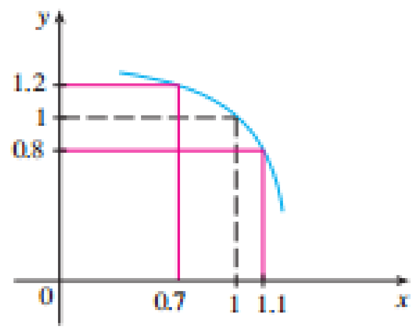
$\boxed{7}$ **និយមន័យ៖** តាង f ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់នៅក្នុងចន្លោះបើកនៃតម្លៃa ប៉ុន្តែលើកលែង aចេញ។ នោះគេបាន៖ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។ មានន័យថាគ្រប់ចំនួនអវិជ្ជមាន N មានចំនួនវិជ្ជមានδ ដែល៖

បើ $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)=N$ ។

លំហាត់

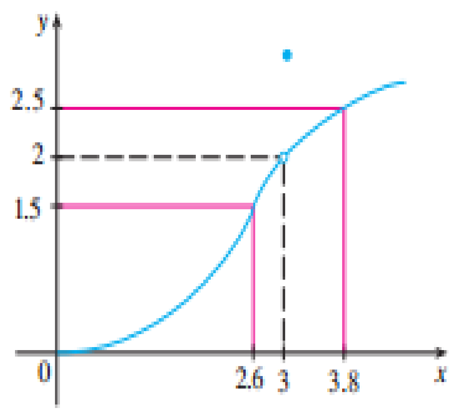
1. ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបានផ្តល់ឲ្យ ដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួនδដែល៖

   បើ $|x-1|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-1|<0.2$ ។



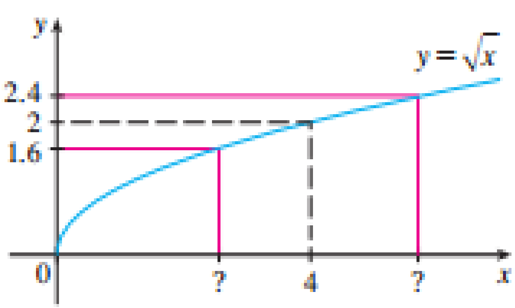
2. ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបានផ្តល់ឲ្យ ដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួន δ ដែល៖

បើ $0<|x-3|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-2|<0.5$ ។



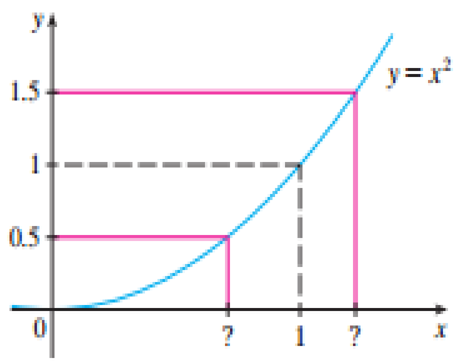
3. ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}$ ដែលបានផ្តល់ឲ្យ ដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួន δ ដែល៖

បើ $|x-4|<\delta$ នាំឲ្យ $|\sqrt{x}-2|<0.4$ ។



4. ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ ដែលបានផ្តល់ឲ្យ ដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួន δ ដែល៖

បើ $|x-1|<\delta$ នាំឲ្យ $|x^2-1|<\dfrac{1}{2}$ ។



5. ចូរប្រើក្រាហ្វដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួន δ ដែល៖

   បើ $|x-\dfrac{\pi}{4}|<\delta$ នាំឲ្យ $|\tan x-1|<0.2$ ។

6. ចូរប្រើក្រាហ្វដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួន δ ដែល៖

   បើ $|x-1|<\delta$ នាំឲ្យ $|\dfrac{2x}{x^2+4}-0.4|<0.1$ ។

7. គេឲ្យ $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-3x+4\right)=6$ ។ ចូរបកស្រាយលីមីតនេះតាមនិយមន័យ ដោ $\boxed{2}$ ធ្វើការរកតម្លៃ

   ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\varepsilon=0.2$ និង $\varepsilon=0.1$ ។

8. គេឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$ ។ ចូរបកស្រាយលីមីតនេះតាមនិយមន័យ $\boxed{2}$ ដោយធ្វើការរកតម្លៃ

   ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\varepsilon=0.5$ និង $\varepsilon=0.1$ ។

9. គេឲ្យលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\tan^2 x=\infty$ ។ ចូរបកស្រាយលីមីតនេះតាមនិយមន័យ $\boxed{6}$ ដោយធ្វើការរកតម្លៃ

   ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $(a)\,M=1000$ និង $(b)\,M=10,000$ ។

10. ចូរប្រើក្រាហ្វ ដើម្បីរកតម្លៃនៃចំនួន δ ដែល៖

    បើ $5<x<5+\delta$ នាំឲ្យ $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-5}}>100$ ។

11. គេឲ្យ $\lim\limits_{x\to 2}(5x-7)=3$ ។ ចូរបកស្រាយលីមីតនេះតាមនិយមន័យ $\boxed{2}$ ដោយធ្វើការរកតម្លៃដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\varepsilon=0.1$, $\varepsilon=0.05$ និង $\varepsilon=0.01$ ។

12. ចូរបង្ហាញដោយប្រើតម្លៃនៃ ε និង δ តាមនិយមន័យលីមីត និងបកស្រាយតាមក្រាហ្វដូចរូបទី៥នៃលីមីតដូចខាងក្រោម៖

ក). $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{1}{3}x\right)=2$ ខ). $\lim\limits_{x\to 4}(2x-5)=3$

គ). $\lim\limits_{x\to -3}(1-4x)=13$ ឃ). $\lim\limits_{x\to -2}(3x+5)=-1$

13. ចូរបង្ហាញដោយប្រើតម្លៃនៃ ε និង δ តាមនិយមន័យលីមីត នៃលីមីតដូចខាងក្រោម៖

ក). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2+4x}{3}=2$ ខ). $\lim\limits_{x\to 10}\left(3-\dfrac{4}{5}x\right)=-5$

គ). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=5$ ឃ). $\lim\limits_{x\to -1.5}\dfrac{9-4x^2}{3+2x}=6$

ង). $\lim\limits_{x\to a}x=a$ ច). $\lim\limits_{x\to a}c=c$

ឆ). $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ ជ). $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$

ឈ). $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ ញ). $\lim\limits_{x\to -6^+}\sqrt[8]{6+x}=0$

ដ). $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4x+5\right)=1$ ឋ). $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-7\right)=1$

ឌ). $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-1\right)=3$ ឍ). $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$ ។

14. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាតម្លៃផ្សេងទៀតនៃ δ អាចបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$ គឺ $\delta=\min\{2,\varepsilon/8\}$ ។

15. ផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយអាគុយម៉ង់ធរណីមាត្រដែលតម្លៃដែលធំបំផុតនៃ δ អាចបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$ គឺ $\delta=\sqrt{9+\varepsilon}-3$ ។

16. ក). គេឲ្យលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+x+1\right)=3$ ។ ចូរប្រើក្រាហ្វដើម្បីរកតម្លៃនៃ δ ដែលត្រូវនឹង $\varepsilon=0.4$ ។

ខ).ដោយប្រើប្រព័ន្ធពិជគណិតក្នុងកុំព្យូទ័រ(កម្មវិធីAlgebra)ដើម្បីដោះស្រាយសមីការទី៣៖

$x^3+x+1=3+\varepsilon$ ។ រកតម្លៃធំបំផុតនៃ δ ដែលផ្ទៀតផ្ទាត់ចំពោះ $\varepsilon>0$ ។

គ). យក $\varepsilon=0.4$ ដែលជាចម្លើយរបស់អ្នកទៅជំនួសក្នុង (ខ) រួចប្រៀបធៀបគ្នារវាង (ក) និង (ខ)។

17. ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ ។

18. ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ បើ $a>0$ ។ $\left[Hin:Use\,|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right]$

19. បើ H ជាអនុគមន៍ *Heaviside* ។ ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{t\to 0}H(t)$ គ្មានលីមីតដោយប្រើនិយមន័យ ។

2 [*Hin*: ប្រើអំណះអំណាងដោយប្រយោលដូចខាងក្រោម។ ឧបមាថា L ជាតម្លៃលីមីត។ យក $\varepsilon=\frac{1}{2}$ តាមនិយមន័យនៃលីមីត ហើយព្យាយាមធ្វើឲ្យវាមានលក្ខណៈផ្ទុយគ្នា។]

20. បើគេមានអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនសនិទាន}\\ 1 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនអសនិទាន}\end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ គ្មានលីមីត។

21. ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបនិយមន័យទី 2 ទី 3 និង 4 ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីនៅក្នុងផ្នែក 2.3។

22. បើគេមាន $\frac{1}{(x+3)^4}>10,000$ ។ តើគេត្រូវធ្វើដូចម្តេច ដើម្បីឲ្យ x ខិតទៅរក -3 ។

23. ដោយប្រើនិយមន័យទី 6 ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4}=\infty$ ។

24. ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ។

25. ឧបមាថា $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$ ដែលជាចំនួនពិត។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ករណីដូចខាងក្រោម៖

ក). $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$

ខ). $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\infty$ បើ $c>0$

គ). $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=-\infty$ បើ $c<0$ ។

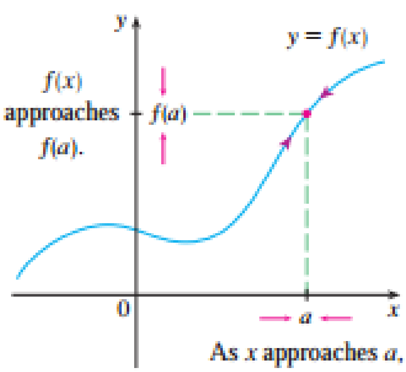
២.៥. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

1 **និយមន័យ៖** អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a កាលណា៖

$$\lim_{x\to a} f(x) f(a)$$

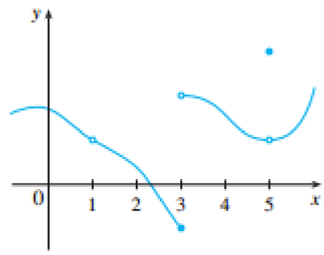
តាមនិយមន័យ 1 បើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a លុះត្រាតែ៖

1. $f(a)$ កំណត់បាន (ដែលស្ថិតនៅក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ មានលីមីត
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ ។ (សូមមើលរូបទី១)



(រូបទី១)

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រូបទី២ បង្ហាញពីក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។ តើអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ចំនួនណា? ហេតុអ្វី?



(រូបទី២)

ដំណោះស្រាយ៖ តាមរូបយើងថាអនុគមន៍ f មិនជាប់នៅពេលដែល $a=1$ ព្រោះក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដាច់ត្រង់ $a=1$ ។ មូលហេតុធំដែល f មិនជាប់នៅពេលដែល $a=1$ ព្រោះនៃមិនកំណត់។ ហើយ f មិនជាប់ផងដែរនៅពេលដែល $a=3$ ប៉ុន្តែមូលហេតុដែលវាមិនជាប់ត្រង់ $a=3$ ដោយសារ $f(3)$ កំណត់បាន តែ $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ មិនអាចកំណត់បាន (ព្រោះលីមីតឆ្វេង និង លីមីតស្តាំខុសគ្នា)។ ដូចនេះ f មិនជាប់ត្រង់ 3 ទេ។

ចុះពេលដែល $a=5$ តើ f មិនជាប់ដែរឬទេ? ដោយ $f(5)$ កំណត់បាន និង $\lim\limits_{x\to5} f(x)$ កំណត់បាន(ព្រោះតម្លៃលីមីតឆ្វេង និង លីមីតស្តាំដូចគ្នា)។ ប៉ុន្តែ $\lim\limits_{x\to5} f(x)\neq f(5)$ ។ ដូចនេះ f មិនជាប់ត្រង់ 5 នោះទេ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ តើអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមមានជាប់ត្រង់ណា?

a). $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

b). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

c). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{បើ } x\neq 2\\ 1 & \text{បើ } x=2\end{cases}$

d). $f(x)=[[x]]$

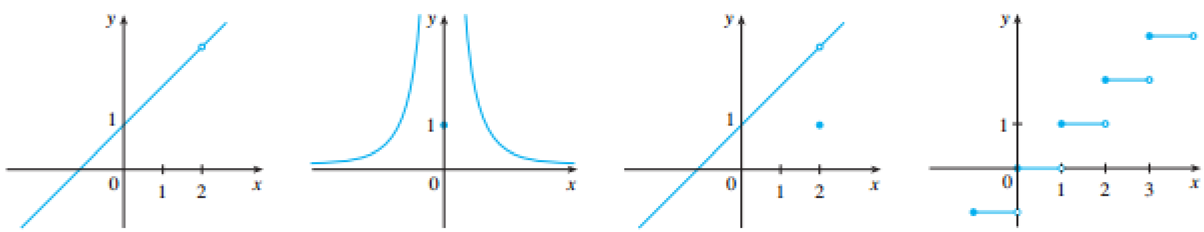
ដំណោះស្រាយ៖

a). យើងសង្កេតឃើញ $f(2)$ ថាមិនកំណត់ទេ។ ប៉ុន្តែចំពោះគ្រប់តម្លៃក្រៅពី 2 យើងឃើញថាអនុគមន៍មានភាពជាប់។

b). ដោយ $f(0)$ កំណត់បាន ប៉ុន្តែ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ កំណត់មិនបាន។ ដូចនេះ f អនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ x ស្មើ 0 ទេ។

c). ដោយ $f(2)$ កំណត់បាន និង $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$ កំណត់បាន។ ប៉ុន្តែ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2} f(2)$។ ដូចនេះ f មិនមានភាពជាប់ត្រង់ x ស្មើ 2 នោះទេ។

d). អនុគមន៍ផ្នែកគត់នៃ $f(x)=[[x]]$ មិនជាប់នៅគ្រប់ចំណុចព្រោះ $\lim\limits_{x\to n}[[x]]$ កំណត់មិនបានគ្រប់ n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (សូមមើលការបកស្រាយតាមក្រាហ្វនៅក្នុងរូបទី៣)។



(a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{if } x\neq 0\\ 1 & \text{if } x=0\end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x\neq 2\\ 1 & \text{if } x=2\end{cases}$ (d) $f(x)=[\![x]\!]$

(រូបទី៣)

2 **និយមន័យ៖** ចំពោះអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់នៅផ្នែកខាងស្តាំកាលណា $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=a$ ។

ចំពោះអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់នៅផ្នែកខាងឆ្វេងកាលណា $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=a$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ដែល $f(x)=[[x]]$ (មើលក្នុងរូបទី៣) វាគឺមានភាពជាប់នៅផ្នែកខាងស្តាំ ប៉ុន្តែវាមិនជាប់នៅផ្នែកខាងឆ្វេងទេ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}[[x]]=n=f(n)$ តែ

$\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}[[x]]=n-1\neq f(n)$។

3 **និយមន័យ៖** អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅចន្លោះបើសិនវាជាប់នៅគ្រប់ចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងចន្លោះនោះ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ ជាប់នៅចន្លោះ $[-1,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បើ $-1<a<1$ នោះតាមច្បាប់លីមីតយើងបាន៖

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=1-\lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2} \quad \text{(ច្បាប់ទី២ និង ទី៧)}$$

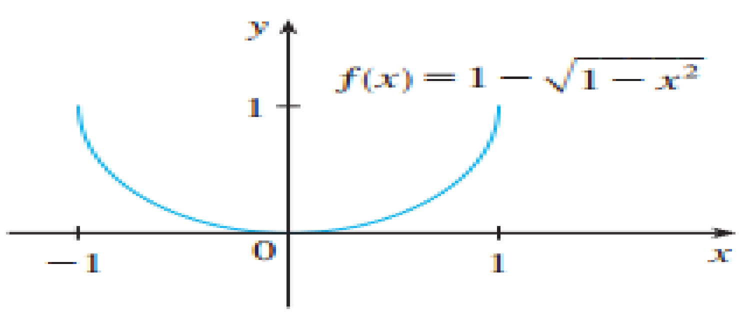
$$=1-\sqrt{\lim_{x\to a}\left(1-x^2\right)} \quad \text{(ច្បាប់ទិ១១)}$$

$$=1-\sqrt{1-a^2} \quad \text{(ច្បាប់ទី២ ទី៧ និង ទី៩)}$$

$$=f(a)$$

ដូច្នេះតាមនិយមន័យទី 1 អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a បើ $-1<a<1$។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ការគណនាបង្ហាញថា

៖ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=1=f(-1)$ និង $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$។ ដូចនេះ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $a=-1$ និងជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $a=1$ ។ ដូចនេះតាមនិយម 3 អនុគមន៍ជាប់នៅចន្លោះ $-1<a<1$ ដែលបង្ហាញដូចនៅក្នុងរូបទី៤ ដែលជាកន្លះរង្វង់នៃអនុគមន៍៖ $x^2+(y-1)^2=1$។



4 ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ a ដែល c ជាចំនួនថេរ នោះគេបានអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាប់ត្រង់ a ដូចខាងក្រោម៖

$1.f+g$ $2.f-g$

$3.fg$ $4.\frac{f}{g}$ ដែល $g(a)\neq 0$

ដោយ f និង g ជាប់ត្រង់ a ដែល $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to}\left[f(x)+g(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$ (តាមច្បាប់ទី១)

$$=f(a)+g(a)$$

$$=(f+g)(a)$$

នេះបង្ហាញឲ្យឃើញថា $f+g$ ជាប់ត្រង់ a ។

5 ទ្រឹស្តីបទ៖

(a). គ្រប់អនុគមន៍ពហុធាទាំងអស់ជាប់នៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}=\{-\infty,+\infty\}$ ។

(b). គ្រប់ចំនួនសនិទានទាំងអស់ជាប់នៅក្នុងដែនកំណត់របស់វា។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

(a) អនុគមន៍ពហុធាមានរាង៖

$P(x)=c_0x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots c_1x+c_0$ ដែល $c_0,c_1,\ldots c_n$ ជាចំនួនថេរ។

យើងដឹងថា៖

$\lim_{x\to a} c_0 = c_0$ (តាមច្បាប់ទី៧)

$\lim_{x\to a} x^m = a^m$ ដែល $m = 1,2,\ldots,n$ (តាមច្បាប់ទី៩)

(b) អនុគមន៍សនិទានមានរាង៖

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ដែល P និង Q ជាអនុគមន៍ពហុធា។ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D=\{x\in\mathbb{R} \mid Q(x)\neq 0\}$។ យើងដឹងហើយថាត្រង់ (a) ជាប់គ្រប់តម្លៃទាំងអស់។ ដូចនេះ តាមផ្នែកទី៥ នៃទ្រឹស្តីបទទី៤ អនុគមន៍ f ជាប់គ្រប់ចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងដែនកំណត់ D។

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ ចូររកតម្លៃលីមីត៖ $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$។

ដំណោះស្រាយ៖ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន។ តាមទ្រឹស្តីបទទី៥ វាជាប់នៅក្នុងដែនកំណត់ ដែលកំណត់ដោយ៖ $\{x \mid x\neq \frac{5}{3}\}$។

គេបាន៖ $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\lim_{x\to a} f(x)=f(-2)$

$=\dfrac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}=-\dfrac{1}{11}$។

7 ទ្រឹស្តីបទបទ៖ ប្រភេទអនុគមន៍ខាងក្រោមគឺជាប់នៅក្នុងដែនកំណត់របស់វាមានដូចជា៖ អនុគមន៍ពហុធា អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍ឫស អនុគមន៍ធរណីមាត្រ អនុគមន៍ធរណីមាត្រប្រាស អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍លោការីត។

ឧទាហរណ៍ទី៦៖ តើអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x+\tan^{-1}x}{x^2-1}$ ជាប់ត្រង់ណា?

ដំណោះស្រាយ៖ ដោយអនុគមន៍ $y=\ln x$ ជាប់ត្រង់ $x>0$ និង $y=\tan^{-1}x$ ជាប់ត្រង់ $\mathbb{R}$ ។ តាមផ្នែកទី១ នៃទ្រឹស្តីបទទី៤អនុគមន៍ $y=\ln x+\tan^{-1}x$ ជាប់ត្រង់ $(0,\infty)$។ ភាគបែង $y=x^2-1$ គឺជាអនុមន៍ពហុធាដែលវាជាប់ត្រង់គ្រប់តម្លៃ។ តាមផ្នែកទី៥ នៃទ្រឹស្តីបទទី៤ អនុគន៍ f ជាប់នៅគ្រប់តម្លៃវិជ្ជមាននៃ x លើកលែងតែ $x^2-1=0$។ ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាប់នៅចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,\infty)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧៖ ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ តាមទ្រឹស្តីបទទី៧ បង្ហាញថា $y=\sin x$ អនុគមន៍វាគឺជាប់។ ភាគបែងនៃអនុគមន៍ $y=2+\cos x$ គឺជាផលបូកនៃអនុគមន៍ជាប់ពីរ ហើយវាជាប់។ យើងសម្គាល់ឃើញថា អនុគមន៍នេះវាមិនអាចស្មើ 0 បានទេ ព្រោះ $\cos x\geq 0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x និង $2+\cos x>0$ គ្រប់តម្លៃ x ដែរ។ គេបាន៖ $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ ជាប់នៅគ្រប់តម្លៃនៃ x ដូចនេះតាមនិយមន័យនៃអនុគមន៍ជាប់គេមឲបាន៖

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}=\lim_{x\to} f(x)=f(\pi)=\frac{\sin\pi}{2+\cos\pi}=\frac{0}{2-1}=0 \text{ ។}$$

> **8 ទ្រឹស្តីបទ៖** បើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ b និង $\lim_{x\to a}g(x)=b$ នោះ $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(b)$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨៖ ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $\lim_{x\to 1}arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោយ arcsin គឺជាអនុគមន៍ជាប់ តាមទ្រឹស្តីបទទី **8** គេបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)&=\arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\\&=\arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)\\&=\arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\&=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\text{ ។}\end{aligned}$$

> **9 ទ្រឹស្តីបទ៖** បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ a និ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(a)$ នោះអនុគន៍បណ្តាក់ $f\circ g$ កំណត់ដោយ $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ដែលវាជាប់ត្រង់ a ។

ស្រាយបញ្ជាក់៖

ដោយ g ជាប់ត្រង់ a គេបាន៖ $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ ហើយ f ជាប់ត្រង់ $b=g(a)$ តាមទ្រឹស្តីបទទី 8

គេបាន៖ $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))$។ វាបញ្ជាក់យ៉ាងច្បាស់ថាអនុគមន៍ $h(x)=f(g(a))$ ជាប់ត្រង់ a នោះ $f\circ g$ ជាប់ត្រង់ a។

ឧទាហរណ៍ទី៩៖ តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់នៅត្រង់ណា?

(a). $h(x)=\sin(x^2)$ (b). $F(x)=\ln(1+\cos x)$

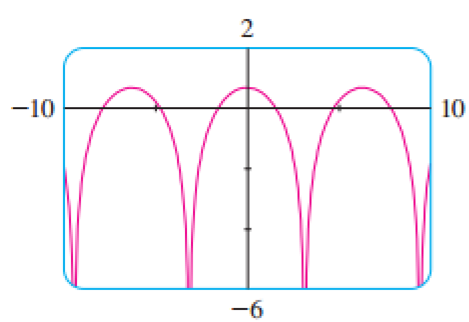
ដំណោះស្រាយ៖

(a) យើងមាន $h(x)=f(g(x))$ ដែល $g(x)=x^2$ និង $f(x)=\sin x$

ចំពោះ g និង f ជាប់ត្រង់□ ព្រោះវាជាអនុគមន៍ពហុធា។ ដូចនេះ $h=f\circ g$ ជាប់ត្រង់ □ (តាមទ្រឹស្តីបទទី៩)។

(b) តាមទ្រឹស្តីបទទី៧ អនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ និង $g(x)=1+\cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់(ព្រោះអនុគន៍ទ $y=1$ និង $y=\cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់)។ តាមទ្រស្តីបទទី៩ $F(x)=f(g(x))$ គឺជាប់ត្រង់ដែនកំណត់របស់វា។ ដោយអនុគមន៍ $\ln(1+\cos x)$ កំណត់ដោយ $1+\cos x>0$ នាំឲ្យ

$\cos x=-1$ នៅពេលដែល $x=\pm\pi,\pm3\pi,\ldots$។ ដូចនេះអនុគន៍ F មិនជាប់នៅពេលដែល x មានមេគុណជាចំនួនសេសនៃ π ហើយវាជាប់នៅចន្លោះតម្លៃទាំងនោះ(ដូចក្នុងរូបទី៧)។

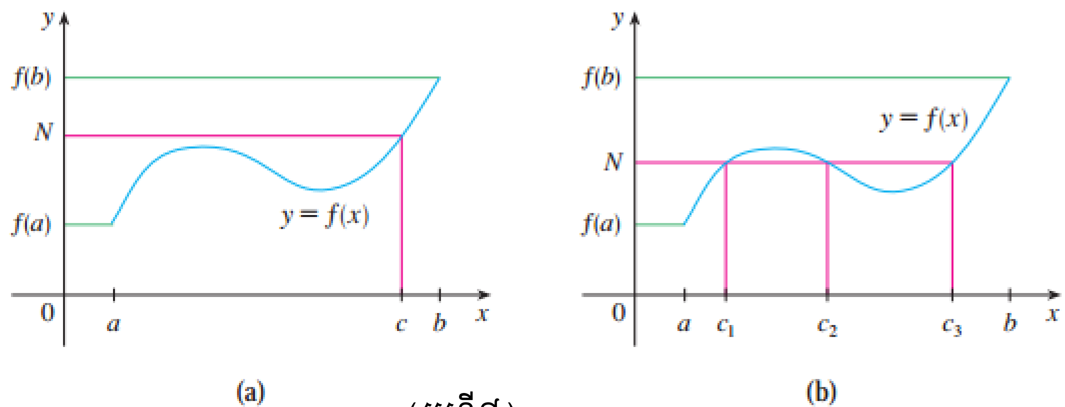


$y=\ln(1+\cos x)$

(រូបទី៧)

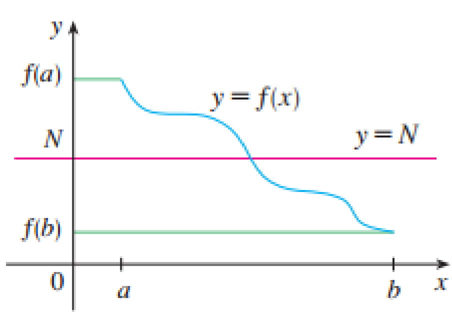
10 ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម៖ ទ្រឹស្តីបទនេះសន្មត់ថាអនុគមន៍ f ជាប់នៅចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយតាង N ជាចំនួនចន្លោះរវាង $f(a)$ និង $f(b)$ ដែល $f(a)\neq f(b)$។ ដូចនេះវាមានចំនួន c នៅក្នុង (a,b) ដែល $f(c)=N$ ។

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមបានពោលថា អនុគមន៍ជាប់នៅគ្រប់តម្លៃមធ្យមរវាង $f(a)$ និង $f(b)$។ យើងសម្គាល់យើងថាតម្លៃ N អាចយកបានមួយ ដូចរូប(a) ឬអាចច្រើនជាងមួយ ដូចរូប(b) នៃរូបទី៨។



(រូបទី៨)

បើយើងគិតទៅលើអនុគមន៍ជាប់ ចំពោះអនុគមន៍ណាដែលមិនជាប់នៅត្រង់ណាមួយ វាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការជឿថាវាមានតម្លៃមធ្យមពិតប្រាកដ។ នៅក្នុងផ្នែកធរណីមាត្រ វាបានពោលថា បើអនុគមន៍ពហុធា ដែលមានបន្ទាត់ $y=N$ ដែលវាផ្តល់ឲ្យនៅចន្លោះ $y=f(a)$ និង $y=f(b)$ ដូចក្នុងរូបទី៩។ ដូចនេះក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f មិនអាចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់បានទេ។ វាត្រូវសព្វនឹង $y=N$ នៅកន្លែងណាមួយ។



(រូបទី៩)

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ បង្ហាញថាសមីការ៖ $4x^3-6x^2+3x-2=0$ មានឫសមួយនៅចន្លោះ 1 និង 2 ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាង $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2$ ហើយតាង ជាតម្លៃដែលយើងត្រូវរកនៅចន្លោះ 1 និង 2 ដែល $f(c)=0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទទី១០ យើងយក $a=1,\ b=2$ និង $N=0$ យើងបាន៖

- $f(1)=4-6+3-2=-1<0$
- $f(2)=32-24+6-2=12>0$

ដោយ $f(1)<f(2)$ ដែល $N=0$ នោះវាជាចំនួននៅចន្លោះ 1 និង 2។

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ព្រោះវាជាអនុគមន៍ពហុធា ហើយទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមបាន ពោលថា c នៅចន្លោះ 1 និង 2 ដែល $f(c)=0$ ។ ម៉្យាងទៀតសមីការ៖ $4x^3-6x^2+3x-2$

មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $(1,2)$ ។

លំហាត់

1. ចូរសរសេរសមីការដែលបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាប់នៅត្រង់ 4 ។
2. តើអ្នកអាចនិយាយបានយ៉ាងដូចម្តេច បើអនុគមន៍ f ជាប់នៅត្រង់ $(-\infty,\infty)$?
3. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលវាភាពជាប់ លើកលែងតែវាមិនជាប់៖

   ក). វាជាប់នៅនៅផ្នែកខាងស្តាំត្រង់ 2 ។

   ខ). វាមិនជាប់ត្រង់ -1 និង 4 ប៉ុន្តែវាជាប់នៅខាងឆ្វេងត្រង់ -1 និង ខាងស្តាំត្រង់ 4 ។

   គ). វាដាច់ចេញពីគ្នាត្រង់ 3 និង នៅខាងលើវាមិនជាប់ត្រង់ 5 ។

   ឃ). ទាំងនៅខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំវាមិនជាប់ត្រង់ 2 ប៉ុន្តែវាជាប់ត្រង់ 2 ។
4. T ជាតម្លៃនៃការគិតលុយនៃការបើកបរនៅលើដងផ្លូវជាក់លាក់មួយដែលមានតម្លៃ 5\$

ប៉ុន្តែនៅពេលផ្លូវមានភាពមមាញឹកខ្លាំង (ចន្លោះពីម៉ោង ៧ ដល់ ម៉ោង ១០ ព្រឹកនិង ចន្លោះពីម៉ោង

៤ ដល់ម៉ោង ៧ យប់)មានតម្លៃ $7\$$ ។

ក). សង់ក្រាហ្វ T ជាអនុគមន៍នៃពេល t (t គិតជាម៉ោងតាំងពីពាក់កណ្តាលអធ្រាត្រ)

ខ). ចូរពិភាក្សាពីអនុគមន៍ដាច់នេះ និង ពីសារៈសំខាន់របស់វាចំពោះអ្នកប្រើប្រាស់ផ្លូវនេះ។

5. ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុ ដែលអនុគមន៍នីមួយៗជាប់ ឬ ដាច់ នៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

ក). សីតុណ្ហភាពនៅត្រង់ទីតាំងជាក់លាក់ ជាអនុគមន៍នៃពេល។

ខ). សីតុណ្ហភាពនៅត្រង់ពេលដ៏ជាក់លាក់ ជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយនៅខាទិសខាងលិចពីទីក្រុងញូយ៉ក។

គ). នីវ៉ូទឹកសមុទ្រ ជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយនៅទិសខាងលិចពីទីក្រុងញូយ៉ក។

ឃ). តម្លៃនៃការរត់តាក់ស៊ី ជាអនុគមន៍នៃចម្ងាយធ្វើដំណើរ។

ង). ចរន្តនៅក្នុងសៀគ្វីសម្រាប់ពន្លឺនៅក្នុងបន្ទប់ ជាអនុគមន៍នៃពេល។

6. គេឲ្យ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ដែល $g(2)=6$ និង $\lim\limits_{x\to 2}\left[3f(x)+f(x)g(x)\right]=36$ ។ ចូររកតម្លៃ $f(2)$ ។

7. ចូរប្រើនិយមន័យ និងលក្ខណៈនៃលីមីត ដើម្បីបង្ហាញថាអនុគមន៍មានភាពជាប់ទៅតាមតម្លៃ a ដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោម៖

ក). $f(x)=3x^4-5x+\sqrt[3]{x^2+4}, a=2$

ខ). $f(x)=\left(x+2x^3\right)^4, a=-1$

គ). $h(t)=\frac{2t-3t^2}{1+t^3}, a=1$ ។

8. ចូរប្រើនិយមន័យ និងលក្ខណៈនៃលីមីត ដើម្បីបង្ហាញថាអនុគមន៍មានភាពជាប់ទៅតាមតម្លៃចន្លោះដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោម៖

ក). $f(x)=\frac{2x+3}{x-2},(2,\infty)$

ខ). $g(x)=2\sqrt{3-x},(-\infty,3)$

9. ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុ ដែលអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់តម្លៃ a ដែលបានផ្តល់ឲ្យ រួចសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍៖

ក). $f(x)=\frac{1}{x+2}, a=-2$

ខ). $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2} & \text{បើ } x\neq -2\\ 1 & \text{បើ } x=-2\end{cases}, a=-2$

គ). $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{បើ } x<0\\ x^2 & \text{បើ } x\geq 0\end{cases}, a=0$

ឃ). $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ 1 & \text{បើ } x=1\end{cases}, a=1$

ង). $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{បើ } x<1\\ 0 & \text{បើ } x=0\\ 1-x^2 & \text{បើ } x>0\end{cases}, a=0$

ច). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-5x-3}{x-3} & \text{បើ } x\neq 3\\ 6 & \text{បើ } x=3\end{cases}$, $a=3$

10. តើអ្នកត្រូវធ្វើដូចម្ដេច ដើម្បីផ្ដាច់ភាពជាប់នៃអនុគន៍ f ? ហើយតើអ្នកត្រូវធ្វើដូចម្ដេច ដើម្បីកំណត់តម្លៃ $f(2)$ ក្នុងការធ្វើឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ 2 ?

ក). $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

ខ). $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ ។

11. ដោយប្រើទ្រឹស្ដីបទទី៤ ទី៥ ទី៧ និងទី៩ ចូរពន្យល់ពីមូលហេតុដែលអនុគមន៍ជាប់នៅគ្រប់តម្លៃនៃដែនកំណត់ ហើយរកដែនកំណត់របស់វាដូចខាងក្រោម៖

ក). $F(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+1}$

ខ). $G(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2-x-1}$

គ). $Q(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x^3-2}$

ឃ). $R(t)=\dfrac{e^{\sin t}}{2+\cos \pi t}$

ង). $A(t)=\arcsin(1+2t)$

ច). $B(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$

ឆ). $M(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

ជ). $N(r)=\tan^{-1}\left(1+e^{-r^2}\right)$

12. រកកន្លែងជាប់នៃអនុគមន៍ និង គណនាដោយប្រើក្រាហ្វ៖ 33–34

ក). $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

ខ). $y=\ln\left(\tan^2 x\right)$ ។

13. ចូរប្រើភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីតដូចខាងក្រោម៖

ក). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

ខ). $\lim\limits_{x\to\pi}\sin\left(x+\sin x\right)$

គ). $\lim\limits_{x\to 1}e^{x^2-x}$

ឃ). $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$ ។

14. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាប់លើ $(-\infty,\infty)$ ៖

ក). $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{បើ } x<1 \\ \sqrt{x} & \text{បើ } x\geq 1 \end{cases}$

ខ). $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{បើ } x<\pi/4 \\ \cos x & \text{បើ } x\geq \pi/4 \end{cases}$

15. រកតម្លៃនៃចំនួនដែលអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់វា។ តើតម្លៃនៃចំនួននោះវាជាប់នៅខាងឆ្វេង ឬ ខាងស្តាំនៃអនុគមន៍ f ? ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម៖

ក). $f\left(x\right)=\begin{cases}1+x^2 & \text{បើ } x\le 0\\ 2-x & \text{បើ } 0<x\le 2\\ \left(x-2\right)^2 & \text{បើ } x>2\end{cases}$

ខ). $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1 & \text{បើ } x\le 1\\ 1/x & \text{បើ } 1<x<3\\ \sqrt{x-3} & \text{បើ } x\ge 3\end{cases}$

គ). $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2 & \text{បើ } x<0\\ e^x & \text{បើ } 0\le x\le 1\\ 2-x & \text{បើ } x>1\end{cases}$

16. កម្លាំងទំនាញផែនដីបញ្ចេញដោយភពផែនដីទៅលើឯកតាម៉ាសមួយដោយចម្ងាយ r ពីចំណុចកណ្តាលនៃផែនដីគឺ៖

$$F\left(r\right)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3} & \text{បើ } r<R\\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{បើ } r\ge R\end{cases}$$

ដែល M គឺជាម៉ាសនៃផែនដី r គឺជាកាំ និង G គឺជាសំទុះទំនាញផែនដីថេរ។ តើជា

អនុគមន៍ដែលជាប់ត្រង់ដែររឺទេ ?

17. តើចំនួនថេរ c ស្មើនឹងប៉ុន្មាន បើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $\left(-\infty,\infty\right)$? បើគេឲ្យអនុគមន៍៖

$$f\left(x\right)=\begin{cases}cx^2+2x & \text{បើ } x<2\\ x^3-cx & \text{បើ } x\ge 2\end{cases}$$

18. ចូររកតម្លៃ a និង b ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ជាប់គ្រប់កន្លែងទាំងអស់។ គេឲ្យ៖

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{បើ } x<2 \\ ax^2-bx+3 & \text{បើ } 2\le x<3 \\ 2x-a+b & \text{បើ } x\ge 3 \end{cases}$$

19. តើអនុគមន៍ f ខាងក្រោមមួយណាដែលបានយកចេញភាពដាច់នៃអុគមន៍ត្រង់$_{x<2}$? បើវាត្រូវបាន យកចេញមែន ចូររកអនុគមន៍ g ដែលស្របនឹងអនុគមន៍ f ហើយវាជាប់ត្រង់$_{x<2}$និង $x\neq a$ ដែល អនុគមន៍ទាំងនោះមានដូចខាងក្រោម៖

ក). $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x-1}$, $a=1$

ខ). $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x-2}$, $a=2$

គ). $f(x)=[[\sin x]]$, $a=\pi$

20. សន្មត់ថាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $[0,1]$ លើកលែង 0.25 ហើយ $f(0)=1$, $f(1)=3$ និងឲ្យ $N=2$ ។ ចូរសង់ក្រាហ្វពីរនៃអនុគមន៍ f ដែលអាចដោយក្រាហ្វមួយបង្ហាញថាអនុគមន៍ f មិនអាច សន្និដ្ឋាន

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមបានទេ និង មួយទៀតបង្ហាញថាអនុគមន៍ f អាចសន្និដ្ឋានបានតាមទ្រឹស្តី

បទតម្លៃមធ្យម។

21. បើ $f(x)=x^2+10\sin x$ ចូរបង្ហាញថាមានចំនួន c ដែល $f(c)=1000$ ។
22. សន្មត់ថាអនុគន៍ f ជាប់ត្រង់ $[1,5]$ ហើយចម្លើយនៃសមីការគឺ $f(x)=6$ ដែល $x=1$ និង $x=4$ ។ បើ $f(2)=8$ ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជា $f(3)>6$?

23. ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម ដើម្បីបង្ហាញថាមានឫសនៃសមីការនៅក្នុងចន្លោះដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចតទៅ៖

ក). $x^4 + x - 3 = 0$,$(1,2)$

ខ). $\sqrt[3]{x} = 1 - x$,$(0,1)$

គ). $e^x = 3 - 2x$,$(0,1)$

ឃ). $\sin x = x^2 - 2$,$(1,2)$

24. ក). គេឲ្យសមីការ $\cos x = x^3$ ។ ចូរបង្ហាញថាសមីការមានឫសពិតយ៉ាងតិចមួយ។

ខ). ចូរប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ ដើម្បីរកតម្លៃចន្លោះប្រវែង 0.01 ដែលជាឫសនៃសមីការ។

25. ក). គេឲ្យសមីការ $\ln x = 3 - 2x$ ។ ចូរបង្ហាញថាសមីការមានឫសពិតយ៉ាងតិចមួយ។

ខ). ចូរប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ ដើម្បីរកតម្លៃចន្លោះប្រវែង 0.01 ដែលជាឫសនៃសមីការ។

26. ក). គេឲ្យសមីការ $100e^{-x/100} = 0.01x^2$ ។ ចូរបង្ហាញថាសមីការមានឫសពិតយ៉ាងតិចមួយ។

ខ). ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីរកឫសប្រាកដដែលមានក្រោយក្បៀសបីខ្ទង់។

27. ក). គេឲ្យសមីការ $\arctan x = 1 - x$ ។ ចូរបង្ហាញថាសមីការមានឫសពិតយ៉ាងតិចមួយ។

ខ). ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីរកឫសប្រាកដដែលមានក្រោយក្បៀសបីខ្ទង់។

28. គេឲ្យ៖ $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ ។ ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a តែមួយគត់។

29. ដើម្បីបញ្ជាក់ថា ស៊ីនុសជាអនុគន៍ជាប់ យើងត្រូវបង្ហាញថា $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។គេឲ្យ៖ $\lim_{h\to 0} \sin(a+h) = \sin a$ ។ ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទទី៦ ដើម្បីបង្ហាញថាវាពិត។

30. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ កូស៊ីនុសជាអនុគមន៍ជាប់។

31. ក). ចូរស្រាយបញ្ជាក់ពីទ្រឹស្តីបទទី៤ នៅក្នុងផ្នែកទី៣។

ខ). ចូរស្រាយបញ្ជាក់ពីទ្រឹស្តីបទទី៤ នៅក្នុងផ្នែកទី៥។

32. តើតម្លៃ x ស្មើប៉ុន្មានដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ f មានភាពជាប់?

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនសនិទាន}\\ 1 & \text{បើ } x \text{ អសនិទាន}\end{cases}$$

33. តើតម្លៃ x ស្មើប៉ុន្មានដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ g មានភាពជាប់?

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនសនិទាន}\\ x & \text{បើ } x \text{ អសនិទាន}\end{cases}$$

34. តើវាមានចំនួនស្មើ 1 ច្រើនជាងឬសគូបដែរឬទេ?

35. បើ a និង b ជាចំនួនវិជ្ជមាន ចូរស្រាយថាសមីការ៖ $\dfrac{a}{x^3+2x^2-1}+\dfrac{b}{x^3+x-2}=0$ មានចម្លើយយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $(-1,1)$ ។

36. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍៖ $f(x)=\begin{cases}x^4\sin(1/x) & \text{បើ } x\neq 0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$ ជាប់នៅចន្លោះ $(-\infty,\infty)$ ។

37. ក). ចូរបង្ហាញថាតម្លៃដាច់ខាតនៃអនុគមន៍ $F(x)=|x|$ ជាប់នៅគ្រប់ទីកន្លែង។

ខ). ចូរស្រាយថា បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅចន្លោះ នោះគេបានអនុគមន៍ $|f|$ ។

គ). តើការបកស្រាយនៅក្នុងសំណួរ (ខ) ពិតដែរឬទេ? ម៉្យាងទៀត បើ $|f|$ ជាអនុគមន៍ជាប់ តើវានៅតែស្របតាម f ដែរឬទេ? បើមែន ចូរស្រាយបញ្ជាក់។ បើមិនមែន ចូររកឧទាហរណ៍បញ្ជាក់។

២.៦.លីមីតត្រង់អនន្ត និង អាស៊ីមតូតដេក

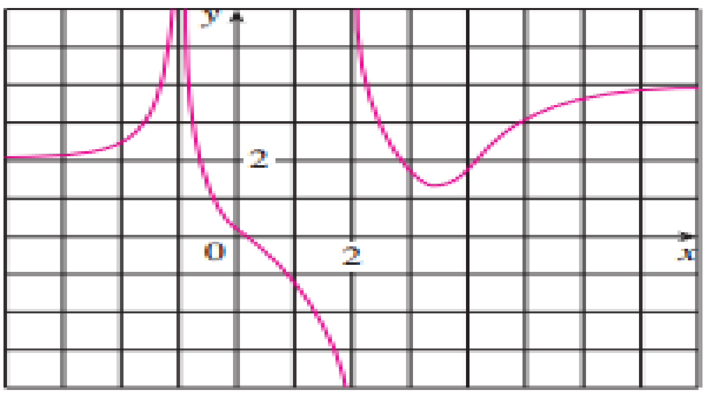
1 **និយមន័យ៖** តាង f ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់នៅចន្លោះ (a,∞) គេបាន $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ ។

2 **និយមន័យ៖** តាង f ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់នៅចន្លោះ $(-\infty,a)$ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ។ មានន័យថាអនុគមន៍ $f(x)$ អាចធ្វើឲ្យវាខិតទៅរក L ដោយធ្វើការយកតម្លៃ x ដ៏ធំខាងតម្លៃអវិជ្ជមាន។

3 **និយមន័យ៖** បន្ទាត់ $y=L$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង កាលណា៖ $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ ។

4 $\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2}$ និង $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកលីមីតអនន្ត លីមីតត្រង់អនន្ត និង អាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ f តាមក្រាហ្វខាងក្រោម៖



ដំណោះស្រាយ៖

- **លីមីតអនន្ត៖** តាមក្រាហ្វយើងឃើញថាតម្លៃនៃ f កាន់តែធំកាលណា $x\to-1$ គេបាន ៖ $\lim_{x\to-1} f(x)=\infty$ ។
- **លីមីតត្រង់អនន្ត៖** នៅពេលដែល x កាន់តែធំ នោះយើងឃើញថា $f(x)$ ខិតទៅរក 4 ប៉ុន្តែពេលដែល x ខិតទៅរកតម្លៃខាងអវិជ្ជមានធំ នោះយើងឃើញថា $f(x)$ ខិតទៅរក 2 គេបាន៖ $\lim_{x\to\infty} f(x)=4$ និង $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ ។
- **អាស៊ីមតូត៖** ចំពោះបន្ទាត់ទាំងពីរ $y=4$ និង $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ចូររកលីមីត៖ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ និង $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ យើងសង្កេតឃើញថានៅពេលដែល x កាន់តែធំ នោះ $1/x$ កាន់តែតូច បើយើងជំនួស៖

$\frac{1}{100}=0.01$, $\frac{1}{10000}=0.0001$, $\frac{1}{1000000}=0.000001$

គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ។

5 **ទ្រឹស្តីបទ៖** បើ $r>0$ ដែលជាចំនួនសនិទាន គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0$ ។

បើ $r>0$ ដែលជាចំនួនសនិទានដូចដែល x^r កំណត់គ្រប់តម្លៃ x គេបាន៖

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គណនា៖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា៖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$ (តាមច្បាប់ទី៥)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

(តាមច្បាប់ទី១ ទី២ និងទី៣)

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0}$$ (តាមទ្រឹស្តីបទី៧ និង ទី៥)

$$=\frac{3}{5}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ ចូររកអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍៖ $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍៖ $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ ៖

- ចាប់ x^2 នៃភាគយកជាកត្តា និង x នៃភាគបែងជាកត្តាហើយសម្រួលនឹង

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(2+\frac{1}{x^2})}}{x(3-\frac{5}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{(2+\frac{1}{x^2})}}{x(3-\frac{5}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(2+\frac{1}{x^2})}}{(3-\frac{5}{x})}$$,(ដែល $\sqrt{x^2}=x, x>0$)

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}3-5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

ដូចនេះ $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ជាអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

នៅពេលដែល $x\to-\infty$ ហើយ $x<0$ នោះ $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ នាំឲ្យពេលដែលយើងចែកភាគយកនឹង x ចំពោះ $x<0$ គេបាន៖

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1}=-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1}=-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

នាំឲ្យ៖ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}=\frac{-\sqrt{2+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

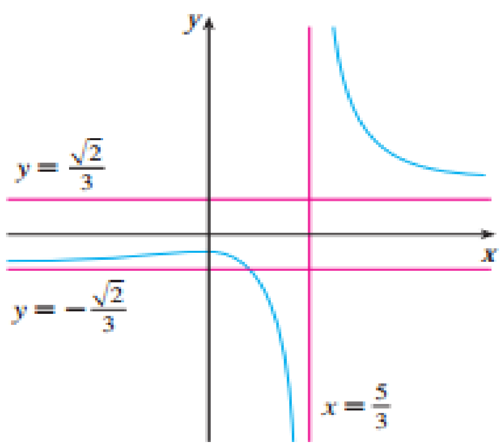
ដូចនេះ $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ជាអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែរ។

- នៅពេលដែល $x=\frac{5}{3}$ នោះវានឹងមានអាស៊ីមតូតឈរនៅពេលដែលភាគបែង $3x-5$ ស្មើ 0 ។ បើ x ខិតទៅរក $\frac{5}{3}$ និង $x>\frac{5}{3}$ នោះភាគបែងខិតទៅរក 0 ហើយ $3x-5$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ ភាគយក $\sqrt{2x^2+1}$ វិជ្ជមានជានិច្ច នោះ $f(x)$ ក៏វិជ្ជមានដែរ។ គេបាន៖

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

បើ x ខិតទៅរក $\frac{5}{3}$ តែ $x<\frac{5}{3}$ ពេលនោះវាធ្វើឲ្យ $3x-5<0$ នាំឲ្យ $f(x)$ មានតម្លៃអវិជ្ជមាន។ គេបាន៖ $\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$

ដូចនេះ $x=\frac{5}{3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍។ សូមមើលក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម៖



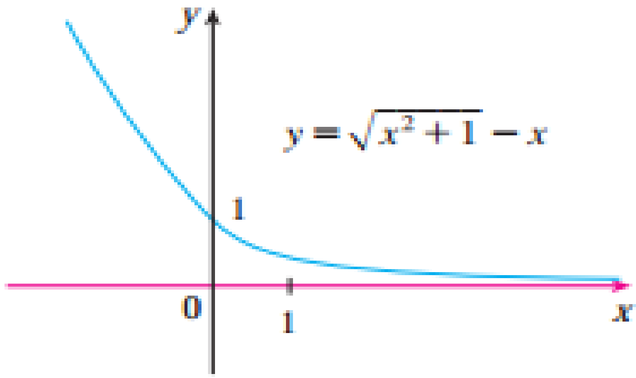
ឧទាហរណ៍ទី៥៖ គណនា៖ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា៖ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ៖

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

សូមមើលក្រាហ្វខាងក្រោម៖



ឧទាហរណ៍ទី៦៖ ៖ គណនា៖ $\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $t = 1/(x-2)$ នៅពេលដែល $x \to 2^+$ នាំឲ្យ $t \to \infty$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{6}$ $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

ឧទាហរណ៍ទី៧៖ គណនា $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$

បើយើងតាង $t = 1/x$ នៅពេលដែល $x \to 0^-$ នោះ $t \to -\infty$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទទី $\boxed{6}$ គបាន៖

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{x\to -\infty} e^t = 0$$

លីមីតត្រង់អនន្ត

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ឧទាហរណ៍ទី៨៖ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty} x^3$ និង $\lim_{x\to -\infty} x^3$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty} x^3$ និង $\lim_{x\to-\infty} x^3$ ៖

- $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩៖ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\right)$ ៖

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(x-1\right) = \infty$$

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}$ ៖

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$ (ព្រោះនៅពេលដែល $x\to\infty$ នោះ $x+1\to\infty$ និង $3/x-1\to-1$)

និយមន័យជាក់លាក់ (Precise Definitions)

7 និយមន័យ៖ តាង f ជាអនុគមន៍កំណត់នៅចន្លោះ (a,∞) គេបាន $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = L$ ។ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $\varepsilon > 0$ វាមានចំនួនដែលទាក់ទងគ្នាគឺ បើ $x > N$ នោះ $|f\left(x\right) - L| < \varepsilon$ ។

8 និយមន័យ៖ តាង f ជាអនុគមន៍កំណត់នៅចន្លោះ $(-\infty, a)$ គេបាន $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = L$ ។

មានន័យថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $\varepsilon > 0$ វាមានចំនួនដែលទាក់ទងគ្នាគឺ បើ $x < N$ នោះ $|f\left(x\right) - L| < \varepsilon$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីរកតម្លៃ N បើគេបាន៖

បើ $x > N$ នោះ $\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6\right| <$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ ប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីរកតម្លៃ N បើគេបាន៖

បើ $x > N$ នោះ $|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6| < 0.1$

យើងសរសេរវិសមភាពឡើងវិញគេបាន៖ $0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$

យើងត្រូវកំណត់តម្លៃនៃ x ដែលផ្តល់ឲ្យខ្សែកោងនៅចន្លោះបន្ទាត់ដេក $y = 0.5$ និង $y = 0.7$

គេបាន៖ $x > 7$ នោះ $|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6| < 0.1$

ម៉្យាងទៀតចំពោះ $\varepsilon = 0.1$ នោះគេបាន $N = 7$ តាមនិយមន័យទី៧។

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ ប្រើនិយមន័យទិ៧ ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ ប្រើនិយមន័យទិ៧ ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

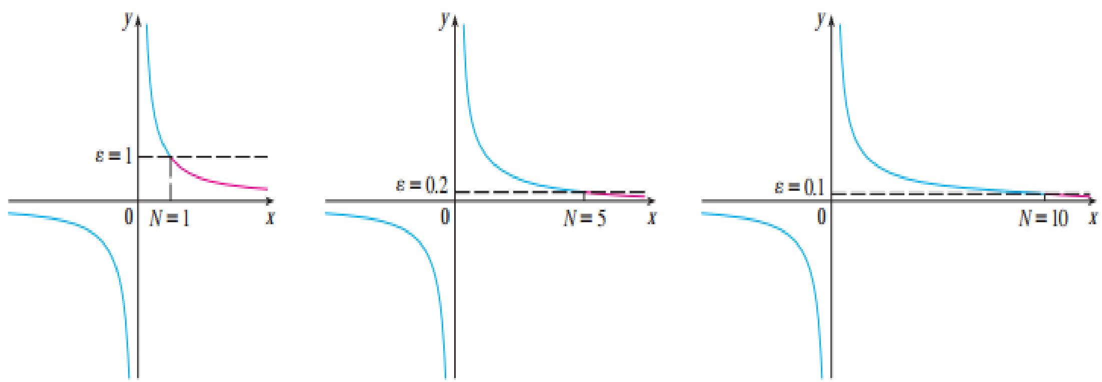
ឲ្យ $\varepsilon > 0$ យើងត្រូវរកតម្លៃ N ដែល៖

បើ $x > N$ នោះ $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$

ក្នុងការគណនាលីមីតខាងលើនេះយើងសន្មតថា $x > 0$ ។ ពេលដែល $1/x < \varepsilon \Leftrightarrow x > 1/\varepsilon$ ដោយយក $N = 1/\varepsilon$ គេបាន៖ បើ $x > N = \frac{1}{\varepsilon}$ នោះ $|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} < \varepsilon$

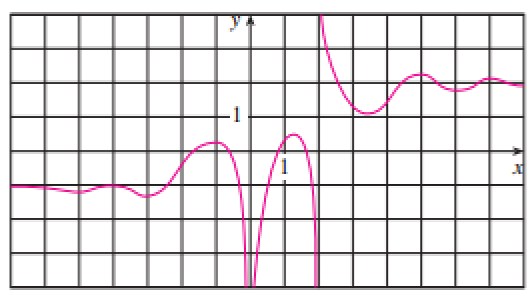
ដូចនេះ តាមនិយមន័យទី៧ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ។

ក្រាហ្វខាងក្រោមនេះ បង្ហាញពីតម្លៃនៃ ε និង តម្លៃដែលទាក់ទងនឹង N ៖



9 **និយមន័យ៖** តាង f ជាអនុគមន៍កំណត់នៅចន្លោះ (a,∞) គេបាន $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ។ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃវិជ្ជមាន M វាមានចំនួនដែលទាក់ទងគ្នានឹងចំនួនវិជ្ជមាន N នោះ

បើ $x>N$ នោះ $f(x)>M$ ។



លំហាត់៖

1. ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីតខាងក្រោម៖

   ក). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$ ខ). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

2. ក). តើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចកាត់អាស៊ីមតូតឈរបានដែររឺទេ ? ហើយវាអាចកាត់អាស៊ីមតូតដេកបានដែររឺទេ ? ចូរបង្ហាញដោយសង់ក្រាហ្វ។

   ខ). តើអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចមានអាស៊ីមតូតដេកចំនួនប៉ុន្មាន ? ចូរសង់ក្រាហ្វ ដើម្បីបង្ហាញ។

3. គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែលផ្តល់ឲ្យដូចនៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរបកស្រាយលីមីតខាងក្រោម៖

   ក). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ខ). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

គ). $\lim_{x\to 1} f(x)$ ឃ). $\lim_{x\to 3} f(x)$

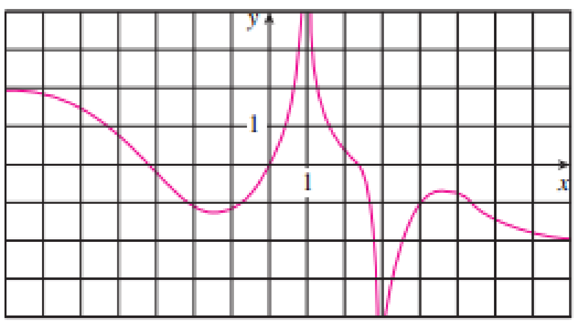
ង). សមីការអាស៊ីមតូត។

4. គេឲ្យអនុគមន៍ g ដែលផ្ដល់ឲ្យដូចនៅក្នុងក្រាហ្វខាងក្រោម។ ចូរបកស្រាយលីមីតខាងក្រោម៖

ក). $\lim_{x\to\infty} g(x)$ ខ). $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

គ). $\lim_{x\to 0} g(x)$ ឃ). $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

ង). $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ ច). សមីការអាស៊ីមតូត។



5. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងអស់ដែលបានផ្ដល់ឲ្យ៖

ក). $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=5,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-5$

ខ). $\lim_{x\to 2} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=-\infty,$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0,\quad f(0)=0$

គ). $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0,$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

ឃ). $\lim_{x\to\infty} f(x)=3,\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ ដែល f ជាអនុគមន៍សេស

ង). $f(0)=3,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=4,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=2,$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 4^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=\infty,$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=3$

ច). $\lim_{x\to 3} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=2,\ f(0)=0,$ ដែល f ជាអនុគមន៍គូ

6. ចូរទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$ ដោយការគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2/2^x$ ចំពោះ $x=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,20,50,$ និង 100 ។ រួចប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដើម្បីគាំទ្រការទស្សន៍ទាយរបស់អ្នក។

7. គណនា និង បង្ហាញពីពភាពត្រឹមត្រូវនៃលីមីតទៅតាមជំហាន ដោយប្រើលក្ខណៈនៃលីមីត៖

ក). $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+4}{2x^2+5x-8}$ ខ). $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{12x^3-5x+2}{1+4x^2+3x^3}}$

8. ចូររកលីមីត ឬ បង្ហាញថាវាគ្មានលីមីតនៃលីតខាងក្រោម៖

ក). $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{2x+1}$ ខ). $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^3-x+1}$

គ). $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+1}$ ឃ). $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+6x^2-2}{2x^3+4x-5}$

ង). $\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$ ច). $\lim_{t\to\infty}\frac{t-t\sqrt{t}}{2t^{3/2}+3t-5}$

ឆ). $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x)}$ ជ). $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

ឈ). $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$ ញ). $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

ដ). $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$ ឋ). $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

ឌ). $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$ ឍ). $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}$

ណ). $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$ ត). $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}+2\cos 3x\right)$

ថ). $\lim_{x\to-\infty}\left(x^4+x^5\right)$ ទ). $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^6}{x^4+1}$

ធ). $\lim_{x\to\infty}\arctan\left(e^x\right)$ ន). $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

ប). $\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^x1}{1+2e^x}$ ផ). $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+1}$

ព). $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-2x}\cos x\right)$ ភ). $\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\ln x)$

9. ក). គណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$ ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$ ។

ខ). ចូរប្រើតារាងតម្លៃលេខនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដើម្បីទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីត។

គ). ចូរបង្ហាញការទស្សន៍ទាយរបស់អ្នកថាពិតជាត្រឹមត្រូវ។

10. ក). ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x^2+8x+6}-\sqrt{3x^2+3x+1}$ ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃលីមីតក្រោយក្បៀសមួយខ្ទង់។

ខ). ចូរប្រើតារាងតម្លៃលេខនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដើម្បីទស្សន៍ទាយតម្លៃនៃលីមីតដោយយកតម្លៃក្រោយក្បៀសបួនខ្ទង់។

គ). រកតម្លៃពិតប្រាកដនៃលីមីត។

11. ចូររកអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោងនីមួយៗខាងក្រោម។ បើមានក្រាហ្វ ចូរធ្វើការពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នក ដើម្បីគណនារកអាស៊ីមតូត៖

ក). $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ ខ). $y=\dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

គ). $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$ ឃ). $y=\dfrac{1+x^4}{x^2-x^4}$

ង). $y=\dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$ ច). $y=\dfrac{2e^x}{e^x-5}$

12. ចូរគណនាអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^3+500x^2}{x^3+500x^2+100x+2000}$ ដោយប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ចំពោះ $-10\le x\le 10$ ។ រួចគណនាសមីការអាស៊ីមតូតដោការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីត។ តើអ្នកអាចពន្យល់ពីភាពខុសគ្នាពីរបៀបទាំងពីរនេះយ៉ាងដូចម្តេច?

13. ក) គេឲ្យអនុគមន៍៖ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ ។ តើអ្នកសង្កេតឃើញអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរចំនួនប៉ុន្មាន? ចូរប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីត៖ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ និង $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ ។

ខ). ដោយការគណនាតម្លៃនៃ $f(x)$ ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃជាលេខនៃលីមីតក្នុង (ក)។

គ). គណនាតម្លៃពិតប្រាកដនៃលីមីតនៅក្នុង (ក)។ តើលីមីតទាំងពីរខាងលើ អ្នកឃើញចម្លើយដូចគ្នាដែរឬទេ?

14. រកក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to 0} f(x)=-\infty,\quad f(2)=0,$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$

15. រកក្រាបរបស់អនុគមន៍ដែលមានអាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ និង $x=3$ និងមានអាស៊ីមតូតដេក $y=1$។

16. អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សមាមាត្រកាដ្រាទីក(Ratio Quadratic Functions) ដែលមានសមីការអាស៊ីមតូតឈរ $x=4$ និង កាត់ x ត្រង់ $x=1$។ យើងដឹងថាអនុគមន៍ f ត្រូវបានយកចេញភាពមិនជាប់(Removable discontinuity) ត្រង់ $x=-1$ និង $\lim_{x\to -1} f(x)=2$។ ចូរគណនា៖

ក). $f(0)$ ខ). $\lim_{x\to\infty} f(x)$។

17. ចូររកលីមីតនៅពេលដែល $x\to\infty$ និង $x\to-\infty$។ ប្រើទិន្នន័យទាំងអស់ដើម្បីសង់ក្រាហ្វ៖

ក). $y=2x^3-x^4$ ខ). $y=x^4-x^6$

គ). $y=x^3(x+2)^2(x-1)$ ឃ). $y=(3-x)(1+x)^2(1-x)^4$

ង). $y=x^2(x^2-1)^2(x+2)$

18. តាង P និង Q ជាអនុគមន៍ពហុធា។ រកលីមីត $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ បើដឺក្រេ P គឺ

(a) តិចជាងដឺក្រេនៃ Q និង (b) ច្រើនជាងដឺក្រេ Q។

19. សង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y=x^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់៖

ក). $n=0$ ខ). $n>0$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេស

គ). $n>0$ ដែល n ជាចំនួនគត់គូ ឃ). $n<0$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេស

ង). $n<0$ ដែល n ជាចំនួនគត់គូ។

រួចប្រើក្រាហ្វទាំងនោះ ដើម្បីរកលីមីតដូចខាងក្រោម៖

a). $\lim_{x\to 0^+} x^n$ b). $\lim_{x\to 0^-} x^n$

c). $\lim\limits_{x\to\infty} x^n$ d). $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ ។

20. រកលីមីត $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$៖

$\dfrac{10e^x-21}{2e^x}<f(x)\dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

21. ចូរប្រើក្រាហ្វ ដើម្បីរកតម្លៃ N បើ៖

បើ $x>N$ នោះ $\left|\dfrac{3x^2+1}{2x^2+x+1}-1.5\right|<0.05$ ។

22. គេមានលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=-2$ ។ ចូរប្រើនិយមន័យទី៧ ដើម្បីរកតម្លៃ N ដែលវាទាក់ទងនឹងតម្លៃ $\varepsilon=0.5$ និង $\varepsilon=0.1$ ។

23. គេមានលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=-2$ ។ ចូរប្រើនិយមន័យទី៨ ដើម្បីរកតម្លៃ N ដែលវាទាក់ទងនឹងតម្លៃ $\varepsilon=0.5$ និង $\varepsilon=0.1$ ។

24. គេមានលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+1}}=\infty$ ។ ចូរប្រើនិយមន័យទី៨ ដើម្បីរកតម្លៃ N ដែលវាទាក់ទងនឹងតម្លៃ $M=100$ ។

25. ក). តើយើងត្រូវយកតម្លៃធំប៉ុណ្ណា ដែលធ្វើឲ្យ $1/x^2<0.0001$?

ខ). យក $r=2$ តាមនិយមន័យទី៥ យើងមាន $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ ។ ចូរបង្ហាញលីមីតនេះដោយផ្ទាល់ដោយប្រើនិយមន័យទី៧។

26. ក). តើយើងត្រូវយកតម្លៃធំប៉ុណ្ណា ដែលធ្វើឲ្យ $1/\sqrt{x}<0.0001$?

ខ). យក $r=\dfrac{1}{2}$ តាមនិយមន័យទី៥ យើងមាន $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ ។ ចូរបង្ហាញលីមីតនេះដោយផ្ទាល់ដោយប្រើនិយមន័យទី៧។

27. ចូរប្រើនិយមន័យទី៩ ដើម្បីបង្ហាញថា៖

ក). $\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$ ខ). $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$ ។

28. ចូរបង្កើតនិយមន័យនៃលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ។ រួចប្រើនិយមន័យនោះ ដើម្បីបង្ហាញថា៖

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^3)=-\infty$ ។

29. ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/t)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(1/t)$ បើវាមានលីមីត។

២.៧. ដេរីវេ និង អត្រាបម្រែបម្រួល

និយមន័យ៖ ពីបន្ទាត់តង់សង់(tangent line) ទៅខ្សែកោង $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $P(a,f(a))$ គឺជាបន្ទាត់កាត់ចំណុច P ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស៖ $m=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់(tangent line) ទៅបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ត្រង់ចំណុច $P(1,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់(tangent line) ទៅបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ត្រង់ចំណុច $P(1,1)$ ៖

យើងមាន៖ $a=1$ $f(x)=x^2$ នោះយើងមានមេគុណប្រាប់ទិស៖

$$m=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)=1+1=2$$

យើងបានសមីការបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line)ដែលកាត់ត្រង់ $P(1,1)$ គឺ៖

$$y-1=2(x-1) \text{ ឬ } y=2x-1$$

$\boxed{2}$ $$m=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ(tangent line) ទៅបន្ទាត់អ៊ីពែបូល $y=3/x$ ត្រង់ចំណុច $P(3,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ(tangent line) ទៅបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y=3/x$ ត្រង់ចំណុច $P(3,1)$ ៖

តាង $f(x)=3/x$ នោះយើងមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $P(3,1)$ គឺ៖

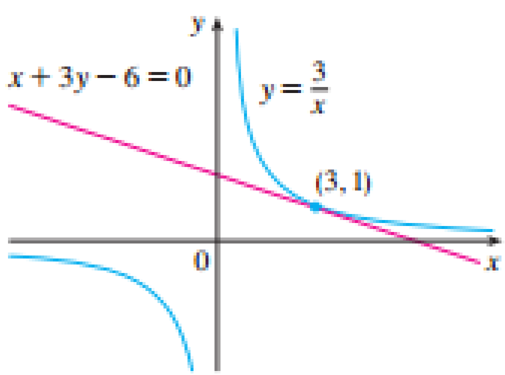
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{3+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(3+h)}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{3+h}=-\frac{1}{3}$$

យើងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (tangent line)ដែលកាត់ត្រង់ $P(3,1)$ គឺ៖ $y-1=-\frac{1}{3}(x-3)$

យើងអាចសរសេរបានថា៖ $x+3y-6=0$ ។

សូមពិនិត្យមើលក្នុងរូបខាងក្រោម៖



ល្បឿន

3 បមន្តល្បឿន៖ $v(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)=f(a)}{h}$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ ឧបមាថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីលើកន្លែងសង្កេតនៃអគារ CN Tower មានកម្ពស់ $450m$ ពីដី។

ក). តើល្បឿនរបស់បាល់ស្មើប៉ុន្មាន ក្រោយពេល 5 វិនាទី ?

ខ). តើល្បឿនរបស់បាល់ស្មើប៉ុន្មាន នៅពេលដែលវាប៉ះនឹងដី ?

ដំណោះស្រាយ៖ យើងត្រូវរកល្បឿន ក្រោយពេល 5 វិនាទី និងល្បឿនពេលវាប៉ះនឹងដី។

តាមសមីការចលនា៖ $s=f(t)=4.9t^2$

ហើយយើងមាន៖ $v(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)=f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4.9(a+h)^2-4.9a^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(a^2+2ah+h^2-a^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4.9\left(2ah+h^2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}4.9(2a+h)=9.8a$$

ក). ល្បឿនរបស់បាល់ស្មើប៉ុន្មាន ក្រោយពេល 5 វិនាទីគឺ៖ $v(5)=(9.8)(5)=49m/s$ ។

ខ). ដោយចម្ងាយពីកន្លែងសង្កេតទៅដីស្មើ $450m$ ហើយបាល់នឹងប៉ះនឹងដីនៅរយៈពេល t_1 នាំឲ្យ $s(t_1)=450$ គេសរសេរបាន៖ $4.9t_1^{\ 2}=450$

យើងបាន៖ $t_1^{\ 2}=\dfrac{450}{4.9}$ នាំឲ្យ $t_1=\sqrt{\dfrac{450}{4.9}}\approx 9.6s$

នាំឲ្យល្បឿនបាល់ពេលវាប៉ះនឹងដីគឺ៖

$v(t_1)=9.8t_1=9.8\sqrt{\dfrac{450}{4.9}}\approx\sim 94m/s$ ។

ដេរីវេ

4 **និយមន័យ៖** ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនួន a មួយ កំណត់សម្គាល់ដោយ $f(a)$ គឺ៖

$$f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

5 $f(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-8x+9$ ត្រង់ចំនួន a មួយ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-8x+9$ ត្រង់ចំនួន a មួយ៖

តាមនិយមន័យទី៤ យើងមាន៖

$$f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(a+h)^2-8(a+h)+9\right]-\left[a^2-8a+9\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-8a-8h+9-a^2+8a-9}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-8h}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h-8)$$

$$=2a-8$$

ពីបន្ទាត់តង់សង់(tangent line) ទៅអនុគមន៍ $y=f(x)$ ត្រង់ $(a,f(a))$ ជាបន្ទាត់ដែលកាត់ត្រង់ $(a,f(a))$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(a)$ ដែជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។

បើយើងប្រើរូបមន្តចំណុចនៃមេគុណប្រាប់ទិសនៃសមីការបន្ទាត់ នោះយើងអាចសរសេរសមីការបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ទៅខ្សែកោង $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច $(a, f(a))$ យើងបាន៖

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ទៅបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 - 8x + 9$ ត្រង់ចំណុច $(3,-6)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ទៅបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 - 8x + 9$ ត្រង់ចំណុច $(3,-6)$ ៖

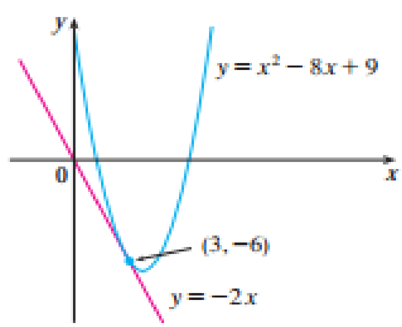
យើងធ្វើដេរីវេនៃអនុគមន៍៖ $f(x) = x^2 - 8x + 9$

$$f'(x) = 2x - 8$$

$$f'(a) = 2a - 8$$

គេបានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ដែលកាត់ត្រង់ចំណុច $(3,-6)$ គឺ៖

$f'(3) = 2(3) - 8 = -2$ ។ ដូចនេះសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) គឺ៖
$y - (-6) = (-2)(x-3)$ ឬ $y = -2x$ ។ មើលក្រាហ្វខាងក្រោម៖



អត្រាបម្រែបម្រួល (Rates of Change)

6 អត្រាបម្រែបម្រួលខណៈ (instantaneous rate of change) $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 = x_1}$ ។

ដេរីវេ $f'(a)$ គឺជាអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈ (instantaneous rate of change) នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ហើយវាអាស្រ័យទៅតាមតម្លៃ x នៅពេល $x=a$។

ឧទាហរណ៍ទី៦៖ ហត្ថករម្នាក់ផលិតរបុំក្រណាត់ដែលមានទទឹងថេរ។ តម្លៃនៃការផលិត x យ៉ាដ (Yard) នៃក្រណាត់គឺ $C=f(x)$ ដុល្លា។

ក). តើដេរីវេមានន័យដូចម្ដេច? តើជាគុរបស់វាមានអ្វីខ្លះ?

ខ). ក្នុងការអនុវត្តជាក់ស្ដែង តើ $f'(1000)=9$ មានន័យដូចម្ដេច?

គ). រវាង $f'(50)$ និង $f'(500)$ តើអ្នកគិតថាមួយណាធំជាង? ចុះចំពោះ $f'(5000)$ វិញវាយ៉ាងដូចម្ដេចដែរ?

ដំណោះស្រាយ៖

ក). ដេរីវេ $f'(x)$ គឺជាអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈ (instantaneous rate of change) C អាស្រ័យទៅតាមតម្លៃ x។ មានន័យថា $f'(x)$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលតម្លៃនៃផលិតផលជាមួយនឹងចំនួននៃផលិតផលយ៉ាដ (Yard) ព្រោះ៖ $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}$

ខ). ក្នុងការអនុវត្តជាក់ស្ដែង $f'(1000)=9$ មានន័យថាបន្ទាប់ពីផលិតបានក្រណាត់ 1000 យ៉ាដ (Yard) អត្រានៃផលិតផលកើនឡើងគឺ $9\$/\text{yard}$ (នៅពេលដែល $x=1000$ នោះ C កើនឡើងបាន 9 ដងដូច x ដែរ)។

បើយើងប្រៀបធៀប $\Delta x=1$ តូចជាង $x=1000$ នោះយើងបាន៖ $f(1000)\approx\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{\Delta C}{1}=\Delta C$ ហើយយើងអាចនិយាយបានថា តម្លៃនៃការផលិតផលទី 1000 (ឬទី 1001) មានតម្លៃប្រហែល $9\$$។

គ). អត្រាដែលតម្លៃនៃផលិតផលកើនឡើង (ក្នុងមួយយ៉ាដ) ពេលដែល $x=500$ វាទាបជាងពេលដែល $x=50$ (មានន័យថាតម្លៃទី 500 យ៉ាដទាបជាងទី 50 យ៉ាដ) ព្រោះដោយសារកត្តាទំហំសេដ្ឋកិច្ច។

គេបាន៖ $f'(50) > f'(500)$ ។ ប៉ុន្តែនៅពេលផលិតកម្មកាន់តែរីកធំឡើង ប្រតិបត្តិការដែលមានទ្រង់ទ្រាយធំអាចនឹងមិនមានប្រសិទ្ធិភាពទេ ហើយវាអាចនឹងមានតម្លៃបន្ថែមម៉ោង។ ដូចនេះវាពិតជាអាចទៅរួច នៅពេលដែលអត្រានៃតម្លៃកើនឡើងពីចំណុចចាប់ផ្តើមដល់ទីបញ្ចប់។ នាំឲ្យ៖

$f'(5000) > f'(500)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧៖ តាង $D(t)$ ជាបំណុលថ្នាក់ជាតិរបស់សហរដ្ឋអាមេរិកនៅខណៈពេល t ។ តារាងបង្ហាញពីតម្លៃនៃអនុគមន៍ក្នុងការប៉ាន់ស្មាននៅចុងឆ្នាំបញ្ចប់ គិតជាពាន់ដុល្លា ពីឆ្នាំ 1980 ដល់ 2005 ។ ចូរបកស្រាយ និង ប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $D'(1990)$ ។

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2
2005	7932.7

ដំណោះស្រាយ៖ ដេរីវេ $D'(1990)$ មានន័យថា គឺជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃ D ដែលអាស្រ័យលើ t នៅពេលដែល $t=1990$ ដែលវាជាការកើនឡើងនៃបំណុលថ្នាក់ជាតិនៅក្នុងឆ្នាំ 1990 ។ យោងតាមសមីការទី៥៖

$$f(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

គេបាន៖ $D'(1990) = \lim\limits_{t\to 1990}\dfrac{D(t)-D(1990)}{t-1990}$

នោះយើងអាចធ្វើការគណនា និង និងរៀបដាក់ក្នុងតារាងដែលមានលទ្ធផលនៃផលចែកខុសគ្នា (អត្រាមប្រែបម្រួលមធ្យម) ដូចខាងក្រោម៖

t	$\frac{D(t)-D(1990)}{t-1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

តាមតារាងយើងឃើញថា $D'(1990)$ នៅចន្លោះ 257.48 និង 348.14 ពាន់ដុល្លាក្នុងមួយឆ្នាំ នោះ $D'(1990)$ ជាតម្លៃមធ្យមនៅចន្លោះតម្លៃនៃ 257.48 និង 348.14 ពាន់ដុល្លាក្នុងមួយឆ្នាំ។ យើងបាន៖

$$D'(1990)=\frac{257.48+348.14}{2}$$

$D'(1990)=302.81\approx 303$ ពាន់ដុល្លាក្នុងមួយឆ្នាំ។

លំហាត់

1. គេមានខ្សែកោងមួយដែលមានសមីការ $y=f(x)$ ។

   ក). សរសេរបញ្ជាក់ពីមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ស៊ិក (The slope of the secant line) ដែលកាត់តាមចំណុច $P(3,f(3))$ និង $Q(x,f(x))$ ។

   ខ). សរសេរបញ្ជាក់ពីមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ត្រង់ P ។

2. ចូរក្រាហ្វនៃខ្សែកោង $y=e^x$ ដែលបង្ហាញនៅក្នុងចតុកោណ $[-1,1]$ ដោយ $[0,2]$, $[-0.5,0.5]$ ដោយ $[0.5,1.5]$, និង $[-0.1,0.1]$ ដោយ $[0.9,1.1]$ ។ តើអ្នកសម្គាល់ឃើញដូចម្តេចចំពោះខ្សែកោងនៅពេលដែលអ្នកពង្រីកទៅដល់ចំណុច $(0,1)$?

3. ក). រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ទៅបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល $y=4x-x^2$ នៅត្រង់ចំណុច $(1,3)$ ដោយ៖

   a). ប្រើនិយមន័យទី១ b). ប្រើសមីការទី២។

   ខ). រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line)ក្នុងសំណួរ (ក)។

គ). ចូរគូសក្រាហ្វ និង សង់បន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល នៅពេលដែលពង្រីកវាទៅដល់ចំណុច $(1,3)$ រហូតបន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូល និង បន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) មិនអាចមើលស្គាល់បាន។

4. ក). រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ទៅខ្សែកោង $y = x - x^3$ នៅត្រង់ចំណុច $(1,0)$ ដោយៈ

   a). ប្រើនិយមន័យទី១ b). ប្រើសមីការទី២។

   ខ). រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line)ក្នុងសំណួរ (ក)។

   គ). ចូរគូសក្រាហ្វ និង សង់បន្ទាត់ប៉ារ៉ាបូលជាបន្តបន្ទាប់គ្នា ដែលបង្ហាញពីចតុកោណកែងតូចនៅចំកណ្តាលត្រង់ចំណុច $(1,0)$ រហូតខ្សែកោង និងបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) លេចឡើងឲ្យឃើញព្រមៗគ្នា។

5. រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) ទៅខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុចដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោមៈ

   ក). $y = 4x - 3x^2, \ (2,-4)$

   ខ). $y = x^3 - 3x + 1, \ (2,3)$

   គ). $y = \sqrt{x}, \ (1,1)$

   ឃ). $y = \dfrac{2x+1}{x+2}, \ (1,1)$ ។

6. ក). រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line)ទៅខ្សែកោង $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ នៅត្រង់ចំណុចដែល $x = a$។

   ខ). រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) នៅត្រង់ចំណុច $(1,5)$ និង $(2,3)$។

   គ). ចូរគូស និង ខ្សែកោង និង សង់បន្ទាត់តង់សង់ (Tangent Iine) នៅលើអេក្រង់ធម្មតា។

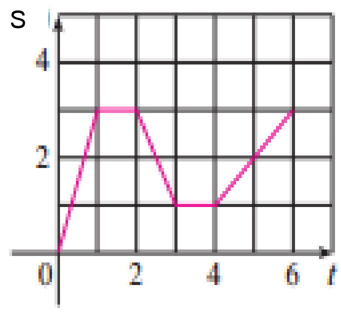
7. ក). រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line)ទៅខ្សែកោង $y = 1/\sqrt{x}$ នៅត្រង់ចំណុចដែល $x = a$។

   ខ). រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (tangent line) នៅត្រង់ចំណុច $(1,1)$ និង $\left(4, \dfrac{1}{2}\right)$។

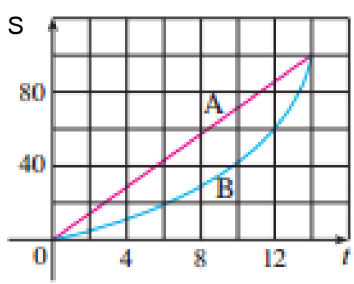
   គ). ចូរគូស និង ខ្សែកោង និង សង់បន្ទាត់តង់សង់ (Tangent Iine) នៅលើអេក្រង់ធម្មតា។

8. ក). ភាគល្អិតមួយបានចាប់ផ្តើមបម្លាស់ទីទៅខាងស្តាំតាមបណ្តោយនៃបន្ទាត់ដេកមួយ។ ក្រាហ្វរបស់ភាគល្អិតនោះបានបង្ហាញពីទីតាំងអនុគមន៍។ តើនៅពេលណាដែភាគល្អិតផ្លាស់ទីទៅខាងស្តាំ? ពេលណាវាផ្លាស់ទៅខាងឆ្វេង? ពេលណាវានៅនឹង គ្មានបម្លាស់ទី?

ខ). ចូរសង់ក្រាហ្វជាអនុគមន៍នៃល្បឿន៖



9. ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍បង្ហាញពីទីតាំងនៃអ្នករត់ពីរនាក់ A និង B ដែលរត់ប្រណាំងគ្នាក្នុងចម្ងាយ $100m$ និងបញ្ចប់ដោយលទ្ធផលស្មើគ្នា។



ក). ចូរពិព័ណ៌នា និង ប្រៀបធៀបរវាងអ្នករត់ប្រណាំងទាំងពីរ។

ខ). តើនៅពេលណាដែលចម្ងាយរវាងអ្នករត់ប្រណាំងទាំងពីរធំបំផុត?

គ). តើនៅរយៈពេលណាដែលពួកគេមានល្បឿនដូចគ្នា?n b

10. ប្រសិនបើបាល់មួយត្រូវបានបោះទៅក្នុងខ្យល់មួយដោយល្បឿន $40\,ft/s$ ដែលកម្ពស់របស់វា(គិតជាហ្វីត $feet$) បន្ទាប់ពីប្រើពេល t (គិតជាវិនាទី s) ផ្តល់ឲ្យដោយសមីការ៖ $y = 40t - 16t^2$ ។ ចូររកល្បឿនរបស់បាល់នៅពេលដែល $t = 2$ ។

11. ប្រសិនបើដុំថ្មមួយត្រូវបានគេចោលទៅលើភពព្រះអង្គារដោយល្បឿន $10m/s$ $40\,ft/s$ ដែលកម្ពស់របស់វា(គិតជាម៉ែត្រ m) បន្ទាប់ពីប្រើពេល t (គិតជាវិនាទី s) ផ្តល់ឲ្យដោយសមីការ៖ $H = 10t - 1.86t^2$ ។

ក). ចូររកល្បឿនរបស់ដុំថ្មក្រោយប្រើពេលអស់ $1s$ ។

ខ). ចូររកល្បឿនរបស់ដុំថ្មនៅពេល $t = a$ ។

គ). តើដុំថ្មនឹងប៉ះនឹងផ្ទៃក្រៅនៅពេលណា?

ឃ). តើដុំថ្មនឹងប៉ះនឹងផ្ទៃក្រៅដោយប្រើល្បឿនប៉ុន្មាន?

12. ភាគល្អិតមួយបានផ្លាស់ទី (គិតជាម៉ែត្រ m) តាមបន្ទាត់ត្រង់មួយដែលមានសមីការចលនា៖ $s = 1/t^2$ ដែល t (គិតជាវិនាទី s) ។ រកល្បឿននៃភាគល្អិតនៅខណៈពេល $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, និង $t = 3$ ។

13. ភាគល្អិតមួយបានផ្លាស់ទី (គិតជាម៉ែត្រ m) តាមបន្ទាត់ត្រង់មួយដែលមានសមីការចលនា៖ $s = t^2 - 8t + 18$ ដែល t (គិតជាវិនាទី s) ។

ក). រកល្បឿនមធ្យមទៅតាមចន្លោះពេលដូចខាងក្រោម៖

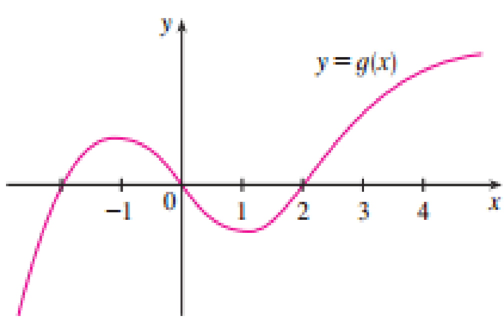
a). $[3,4]$ b). $[3.5,4]$

c). $[4,5]$ d). $[4,4.5]$ ។

ខ). រកល្បឿនខណៈនៅពេលដែល $t = 4$ ។

គ). សង់ក្រាហ្វនៃ f ជាអនុគមន៍នៃពេល t និងសង់បន្ទាត់ស៊ិក (secant line)ដែលមេគុណប្រាប់ទិសរបស់វាជាល្បឿនមធ្យមកនៅក្នុងសំណួរ (ក) និង សង់បន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ដែលមេគុណប្រាប់ទិសគឺជាល្បឿនខណៈនៅក្នុងសំណួរ (ខ)។

14. គេមានអនុគមន៍ g ដែលមានក្រាហ្វដូចបង្ហាញក្នុងរូប។ ចូររៀបចំនួនខាងក្រោមតាមលំដាប់កើន និងពន្យល់ពីហេតុផលរបស់អ្នក៖ $0,\ g'(0),\ g'(2),\ g'(4),$



15. រកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅក្រាហ្វនៃខ្សែកោង $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច $x = 5$ បើ $g(5) = -3$ និង $g'(5) = 4$ ។

16. បើសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅក្រាហ្វនៃខ្សែកោង $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $a=2$ គឺ៖ $y=4x-5$ ។ ចូររក $f(2)$ និង $f'(2)$ ។

17. បើបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅក្រាហ្វនៃខ្សែកោង $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $(4,3)$ កាត់នៅត្រង់ចំណុច $(0,2)$ ។ ចូររក $f(4)$ និង $f'(4)$ ។

18. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f បើ៖ $f(0)=0,\quad f'(0)=3,\quad f'(1)=0,$ និង $f'(2)=-1$ ។

19. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ g បើ៖ $g(0)=g(2)=g(4)=0,\ \ g'(1)=g'(3)=0,$ $g'(0)=g'(4)=1,\ \ g'(2)=-1,\ \ \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty,$ និង $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ។

20. បើគេមាន $f(x)=3x^2-x^3$ ។ ចូររកតម្លៃ $f'(1)$ និងប្រើតម្លៃ $f'(1)$ ដើម្បីកំណត់សមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅខ្សែកោង $y=3x^2-x^3$ នៅត្រង់ចំណុច $(1,2)$ ។

21. បើគេមាន $g(x)=x^4-2$ ។ ចូររកតម្លៃ $g'(1)$ និងប្រើតម្លៃ $g'(1)$ ដើម្បីកំណត់សមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅខ្សែកោង $y=x^4-2$ នៅត្រង់ចំណុច $(1,-1)$ ។

22. ចូររក $f'(a)$៖

ក). $f(x)=3x^2-4x+1$

ខ). $f(t)=2t^3+t$

គ). $f(t)=\dfrac{2t+1}{t+3}$

ឃ). $f(x)=x^{-2}$

ង). $f(x)=\sqrt{1-2x}$

ច). $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{1-x}}$ ។

23. លីមីតនីមួយៗខាងក្រោមតំណាងឲ្យដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនួន a ។ ចូរបកស្រាយរវាង f និង a ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

ក). $\lim_{h\to0}\dfrac{(1+h)^{10}-1}{h}$

ខ). $\lim_{h\to0}\dfrac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

គ). $\lim_{x\to5}\dfrac{2^x-32}{x-5}$

ឃ). $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\tan x-1}{x-\pi/4}$

ង). $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

ច). $\lim_{t\to 1}\frac{t^4+t-2}{t-1}$ ។

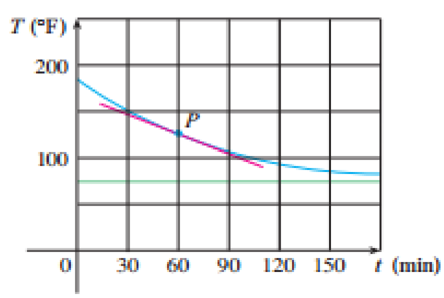
24. ភាគល្អិតមួយផ្លាស់ទីតាមបន្ទាត់ត្រង់ដែលមានសមីការចលនា៖ $s=f(t)$ ដែល s គិតជាម៉ែត្រ(m) និង t គិតជាវិនាទី (s)។ ចូររកល្បឿននៅខណៈពេល $t=5$ ក្នុងករណីដូចខាងក្រោម៖

ក). $f(t)=100+50t-4.9t^2$

ខ). $f(t)=t^{-1}-t$ ។

25. កំប៉ុងសូដាក្តៅឧណ្ណៗមួយត្រូវបានដាក់ក្នុងទូទឹកកកត្រជាក់មួយ។ ចូរសង់ក្រាហ្វនៃសីតុណ្ហភាពរបស់សូដាជាអនុគមន៍នៃពេល។ តើអត្រាបម្រែបម្រួលដំបូងនៃសីតុណ្ហភាពធំជាង ឬ តូចជាងអត្រាបម្រែបម្រួល បន្ទាប់ពីប្រើពេលអស់ 1 ម៉ោង?\

26. មាន់បារាំងអាំងមួយត្រូវបានយកចេញពីឡនៅពេលដែលសីតុណ្ហភាពរបស់វាឡើងដល់ 185^0F ដោយយកវាដាក់លើតុនៅក្នុងបន្ទប់មួយដែលមានសីតុណ្ហភាព 75^0F ។ ក្រាហ្វបង្ហាញពីសីតុណ្ហភាពនៃមាន់បារាំងថយចុះ ហើយនៅទីបំផុតសីតុណ្ហភាពរបស់វាខិតទៅរកសីតុណ្ហភាពរបស់បន្ទប់។ ដោយធ្វើការវាស់មេគុណប្រាប់ទិសនៃតង់សង់ (Tangent) ចូរប៉ាន់ស្មានអត្រាបម្រែបម្រួលនៃសីតុណ្ហភាព បន្ទាប់ពីប្រើពេលអស់ 1 ម៉ោង។



27. N ជាចំនួននៃគ្រឿងទូរស័ព្ទរបស់សហរដ្ឋអាមេរិចដែលអតិថិជនប្រើ (គិតជាលាននាក់) ដូចបង្ហាញនៅក្នុងតារាង (តាមការប៉ាន់ស្មានពាក់កណ្តាលឆ្នាំ)។

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

ក). រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃការកើនឡើងនៃគ្រឿងទូរស័ព្ទ៖

a). ពីឆ្នាំ 2002 ដល់ឆ្នាំ 2006

b). ពីឆ្នាំ 2002 ដល់ឆ្នាំ 2004

c). ពីឆ្នាំ 2000 ដល់ឆ្នាំ 2002 ។

(ក្នុងករណីនីមួយៗខាងលើនេះ គិតសរុបគ្រប់ម៉ាកទូរស័ព្ទទាំងអស់)។

ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃការកើនឡើងនៅក្នុងឆ្នាំ 2002 ដោយយកតម្លៃមធ្យមនៃ តម្លៃអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមពីរ។ តើវាមានអ្វីខ្លះ?

គ). ចូរប៉ាន់ស្មានអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃការកើនឡើងនៅក្នុងឆ្នាំ 2002 ដោយធ្វើការវាស់មេគុណប្រាប់ទិសនៃតង់សង់ (Tangent)។

28. N ជាចំនួនទីតាំងនៃផ្ទះលក់កាហ្វេលក់តជាប់គ្នាដ៏ពេញនិយមដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងតារាង (ចំនួនទីតាំងគិតចាប់ពីថ្ងៃទី ០១ ខែ តុលា)។

Year	2004	2005	2006	2007	2008
N	8569	10,241	12,440	15,011	16,680

ក). រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃការកើនឡើង៖

a). ពីឆ្នាំ 2006 ដល់ឆ្នាំ 2008

b). ពីឆ្នាំ 2006 ដល់ឆ្នាំ 2007

c). ពីឆ្នាំ 2005 ដល់ឆ្នាំ 2006 ។

(ក្នុងករណីនីមួយៗខាងលើនេះ គិតសរុបគ្រប់ផ្ទះទាំងអស់)។

ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃការកើនឡើងនៅក្នុងឆ្នាំ 2006 ដោយយកតម្លៃមធ្យមនៃ តម្លៃអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមពីរ។ តើវាមានអ្វីខ្លះ?

គ). ចូរប៉ាន់ស្មានអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃការកើនឡើងនៅក្នុងឆ្នាំ 2002 រួចប្រៀបធៀបវាជាមួយអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃការកើនឡើងនៅក្នុងឆ្នាំ 2006 ។ តើអ្នកយល់ឃើញដូចម្តេច?

29. តម្លៃនៃទំណិញ x មួយ (គិតជាដុល្លា) កំណត់ដោយសមីការ៖ $C(x)=5000+10x+0.05x^2$ ។

ក). រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ C ដែលវាអាស្រ័យទៅនឹង x ពេលដែលកម្រិតទំនិញមានការប្រែប្រួល៖

a). ពី $x=100$ ទៅ $x=105$

b). ពី $x=100$ ទៅ $x=101$ ។

ខ). រកអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃ C ដែលវាអាស្រ័យទៅនឹង x នៅពេលដែល $x=100$ ។

30. បើធុងមួយមានរាងដូចស៊ីឡាំងដែលអាចផ្ទុកទឹកបាន 100000 កាឡុង (Gallon)។ ទឹកត្រូវបានគេបង្ហូរចេញពីធុងក្នុងរយៈពេលមួយម៉ោង។ បន្ទាប់មកច្បាប់តូរីស៊ីលី (Torricelli′s Law)បានផ្តល់ឲ្យនូវមាឌទឹក V ដែលនៅសល់ក្នុងធុងក្រោយពេលប្រើពេល t នាទី។ មាឌនោះឲ្យដោយសមីការ ៖

$$V(t)=100,000\left(1-\frac{1}{60}\right)^2$$ ដែល $0\le t\le 60$ ។

រកអត្រាដែលទឹកហូរចេញពីធុង (អត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃ V ដែលអាស្រ័យទៅលើ t) ជាអនុគមន៍នៃពេល t ។ តើវាមានអ្វីខ្លះ ? ចំពោះពេល $t=0,10,20,30,40,50,$ និង 60 នាទី ចូររកអត្រាលំហូរ និងបរិមាណទឹកដែលនៅសល់ក្នុងធុង។ ចូរសង្ខេបចម្លើយដែលអ្នករកឃើញជាមួយ ឬពីរប្រយោគ។ តើនៅពេលណាដែលលំហូរនៃទឹកខ្ពស់បំផុត ? ពេលណាទាបបំផុត ?

31. តម្លៃមាស x អោន (x ounces of gold) ពីអណ្តូងរ៉ែមាសគឺកំណត់ដោយ៖ $C=f(x)$ ដុល្លា។

ក). តើដេរីវេ $f'(x)$ មានន័យដូចម្តេច ? តើវាមានអ្វីខ្លះ ?

ខ). តើ $f'(800)=17$ មានន័យដូចម្តេច ?

គ). តើគិតថាតម្លៃនៃកើនឡើង ឬ ថយចុះក្នុងរយៈពេលដ៏ខ្លី ? ចុះបើក្នុងរយៈពេលដ៏វែង ? ចូរពន្យល់។

32. ចំនួនបាក់តេរី បន្ទាប់ពីប្រើពេល t (ម៉ោង) ដែលស្ថិតនៅក្នុងការគ្រប់គ្រងពីបន្ទប់ពិសោធន៍មួយឲ្យដោយសមីការ៖ $n=f(t)$ ។

ក). តើដេរីវេ $f'(5)$ មានន័យដូចម្តេច ? តើវាមានអ្វីខ្លះ ?

ខ). ឧបមាថា នៅក្នុងលំហាឥតដែនកំណត់មួយ មានសារជាតុចិញ្ចឹមសម្រាប់ផ្គត់ផ្គង់បាក់តេរី។ តើអ្នកគិតថា $f'(5)$ និង $f'(10)$ មួយណាធំជាង ? ប្រសិនបើសារជាតុចិញ្ចឹមសម្រាប់ផ្គត់ផ្គង់បាក់តេរីមានដែនកំណត់ តើវាមានផលប៉ះពាល់ដល់ការសន្និដ្ឋានរបស់ដែររឺទេ ? ចូរពន្យល់។

33. តាង $T(t)$ ជាសីតុណ្ហភាពគិតជាផារិនហៃ $\left({}^{0}F\right)$ នៅក្នុងហ្វូនិក (phoenix) ក្នុងរយៈពេល t (ម៉ោង) នៅពាក់កណ្តាលអធ្រាត្រនៅថ្ងៃទី ១០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០៨។ តារាងបង្ហាញពីតម្លៃនៃអនុគមន៍នេះដែលបានកត់ត្រាទុករៀងរាល់ពីម៉ោងម្តង។ តើ $T'(8)$ មានន័យដូចម្តេច? ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃរបស់វា។

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

34. បរិមាណកាហ្វេដ៍ឆ្ងាញ់គិតជា (ផោន) ត្រូវបានលក់ដោយក្រុមហ៊ុនកាហ្វេមួយក្នុងតម្លៃ p ដុល្លាក្នុងមួយផោន គឺ៖ $Q = f(p)$។

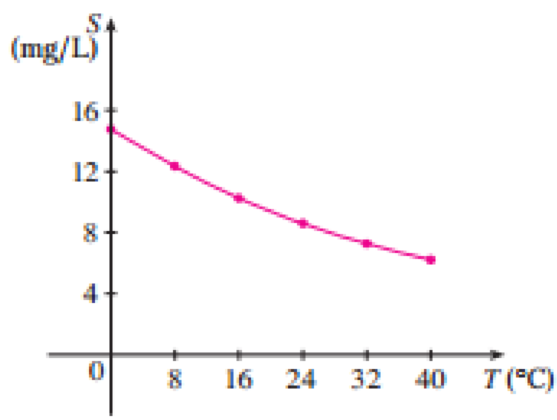
ក). តើដេរីវេ $f'(8)$ មានន័យដូចម្តេច? តើវាមានអ្វីខ្លះ?

ខ). តើ $f'(8)$ វិជ្ជមាន ឬ អវិជ្ជមាន? ចូរពន្យល់។

35. បរិមាណអុកស៊ីសែនដែលអាចរលាយក្នុងទឹកបានវាអាស្រ័យទៅលើសីតុណ្ហភាពរបស់ទឹក (កម្តៅមានឥទ្ធិពលទៅលើទឹកក្នុងការរំលាយអុកស៊ីសែន)។ ក្រាហ្វបង្ហាញពីដំណើរប្រែប្រួលដែលអុកស៊ីសែនរលាយខុសៗគ្នាកំណត់ដោយ S ជាអនុគមន៍នៃសីតុណ្ហភាពនៃទឹក T។

ក). តើដេរីវេ $S'(T)$ មានន័យដូចម្តេច? តើវាមានអ្វីខ្លះ?

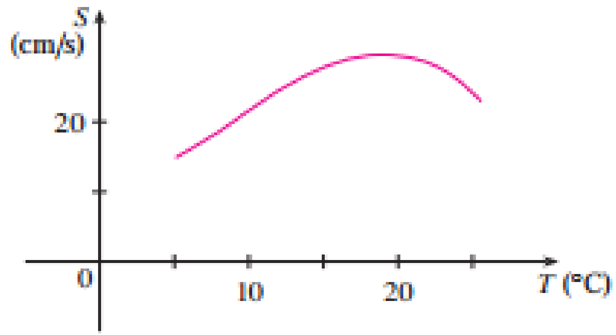
ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $S'(16)$ រួចបកស្រាយ។



36. ក្រាហ្វខាងក្រោមបង្ហាញពីឥទ្ធិពលនៃសីតុណ្ហភាពទៅលើល្បឿនហែលទឹកជាអតិបរមា S របស់ត្រីសាលម៉ុន (Coho salmon)។

ក). តើដេរីវេ $S'(T)$ មានន័យដូចម្តេច? តើវាមានអ្វីខ្លះ?

ខ). ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $S'(15)$ និង $S'(25)$ រួចបកស្រាយ។



37. ចូរកំណត់តើ $f'(0)$ មានឬទេ ? Determine whether exists.៖

ក). $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

ខ). $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

២.៨. ដេរីវេនៃអនុគមន៍

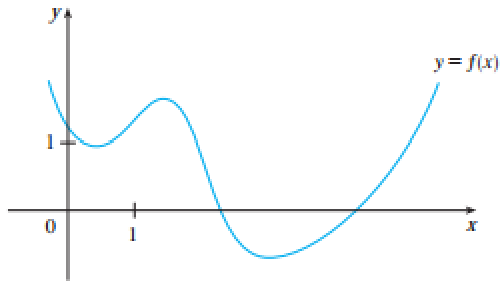
ដេរីវេនៃអនុគមន៍ដែលមានចំនួនថេរ a មួយកំណត់ដោយ៖

$$\boxed{1} \quad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

បើយើងជំនួស a ទៅក្នុងសមីការ $\boxed{1}$ ដោយអថេរ x នោះយើងបាន៖

$$\boxed{2} \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដូចរូបខាងក្រោម។ ចូរប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ f'។

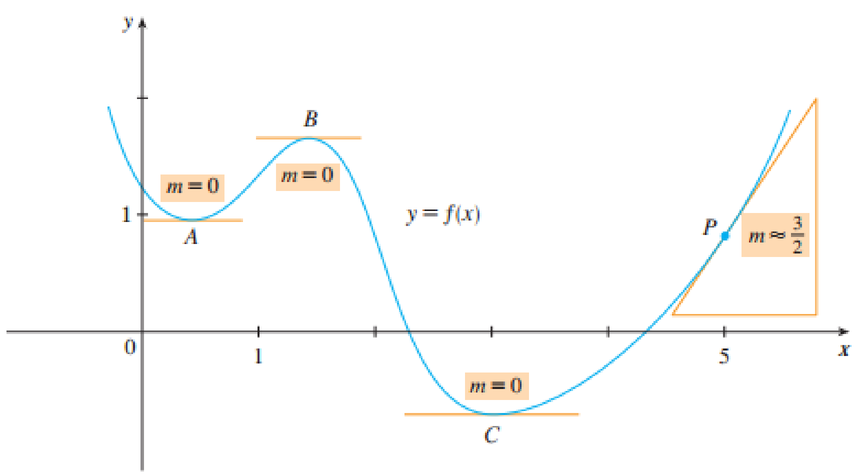


ដំណោះស្រាយ៖ ប្រើក្រាហ្វនោះដើម្បីសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ f'៖

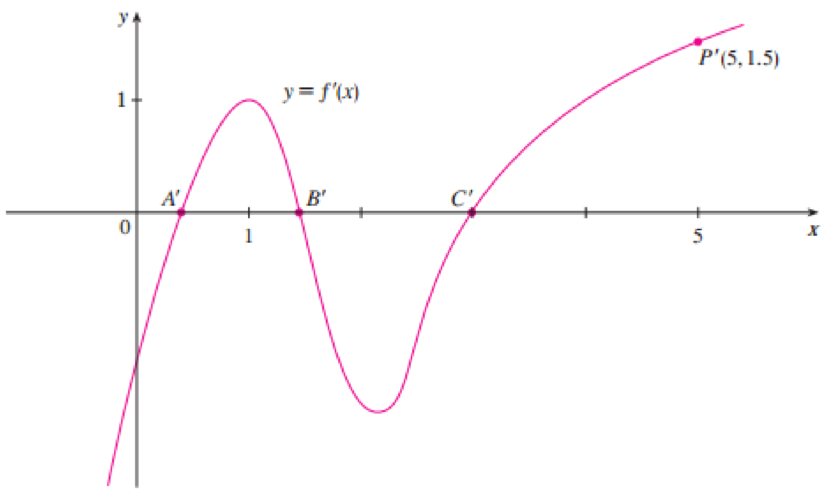
យើងអាចធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃដេរីវេទៅតាមតម្លៃ x ជាច្រើនដោយគូសតង់សង់ (Tangent) ត្រង់ចំណុច $(x, f(x))$ និង ការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃមេគុណប្រាប់ទិស។ ឧទាហរណ៍ ចំពោះ $x=5$ យើងគូសតង់សង់ (Tangent) ត្រង់ P ដូចក្នុងរូប (a) ហើយប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃមេគុណប្រាប់ទិសប្រហែល $\frac{3}{2}$ $f'(5)\approx 1.5$។ យើងអាចដំណើរចំណុច $P'(5,1.5)$ នៅលើក្រាហ្វនៃ f' បានដោយផ្ទាល់ខាងក្រោយ P។ ធ្វើបែបនេះឲ្យបានបី បួនដង នោះយើងនឹងទទួលបានក្រាហ្វដូចរូបទី (b)។ យើងសម្គាល់ឃើញថាតង់សង់ (Tangent) ត្រង់ $A,\ B,$ និង C ជាបន្ទាត់ដេក និងមានដេរីវេស្មើ 0 ហើយក្រាហ្វនៃ f' កាត់អាប់ស៊ីស x ត្រង់ចំណុច $A'\ \ B',$ និង C' ដោយផ្ទាល់ដែលនៅខាងក្រោយ $A,\ B,$ និង C។ រវាង A និង B តង់សង់

(Tangent) មានមេគុណប្រាប់ទិសវិជ្ជមាន នាំឲ្យ f' នៅកន្លែងនោះវិជ្ជមាន។ ប៉ុន្តែរវាង B និង C តង់សង់

(Tangent) មានមេគុណប្រាប់ទិសអវិជ្ជមាន នាំឲ្យ f' នៅកន្លែងនោះអវិជ្ជមានដែរ។



(a)



(b)

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ក). បើ $f(x)=x^3-x$ ។ ចូររក $f'(x)$ ។

ខ). ចូរបង្ហាញពីការប្រៀបធៀបខ្សែកោង f និងដេរីវេ f'។

ដំណោះស្រាយ៖ ក). រក $f'(x)$៖

យើងមាន៖ $f(x)=x^3-x$ យើងបាន៖

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left[(x+h)^3-(x+h)\right]-\left[x^3-x\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h}$$

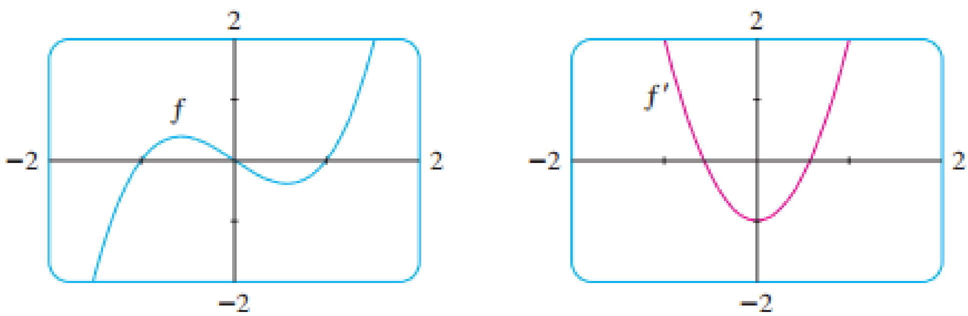
$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h\left(3x^2+3x+h^2-1\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(3x^2+3x+h^2-1\right)$$

$$=3x^2-1$$ ។

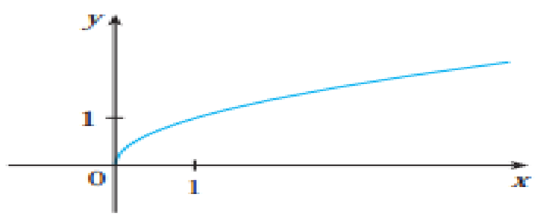
ខ). បង្ហាញពីការប្រៀបធៀបខ្សែកោង f និងដេរីវេ f'៖

យើងប្រើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f និង f'ដូចនៅក្នុងរូបខាងក្រោម។ យើងសម្គាល់ឃើញថា $f'(x)=0$ នៅពេលដែល f តង់សង់ដេក (Horozontal Tangent) និង f'គឺវិជ្ជមាននៅពេលដែលតង់សង់ (Tangent) មានមេគុណប្រាប់ទិសវិជ្ជមាន។

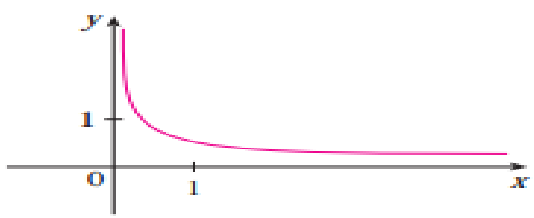


ឧទាហរណ៍ទី៣៖ បើ $f(x)=\sqrt{x}$ ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។ ចូរបង្ហាញពីដែនកំណត់នៃ f'។

ដំណោះស្រាយ៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ៖



(a) $f(x)=\sqrt{x}$



(b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

យើងមាន $f(x)=\sqrt{x}$ នាំឲ្យ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ ។

បង្ហាញពីដែនកំណត់នៃ f'៖

យើងសង្កេតឃើញថាពេលដែល $x>0$ នោះ f'កំណត់បាន។ ដូចនេះដែនកំណត់នៃ f'គឺ $(0,\infty)$ ។ ដែនកំណត់របស់វាតូចជាងដែនកំណត់របស់ f គឺ $[0,\infty)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ បើ $f(x)=\frac{1-x}{2+x}$ ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ៖

យើងមាន $f(x)=\frac{1-x}{2+x}$ នាំឲ្យ f'៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\frac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1-x-h)(2+x)-(1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2-x-2h-x^2-xh\right)-\left(2-x+h-x^2-xh\right)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{(2+x+h)(2+x)}$$

$$=-\frac{3}{(2+x)^2}$$ ។

កំណត់សម្គាល់ផ្សេងៗ

ចំពោះដេរីវេគេអាចសរសេរបានដូចខាងក្រោម៖

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

D និង $\frac{d}{dx}$ ហៅថាការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល (differentiation operators)

ចំពោះដេរីវេខាងលើនេះគេអាចសរសេរបានថា៖ $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ប្រសិនបើយើងបង្ហាញពីតម្លៃនៃដេរីវេ $\frac{d}{dx}$ នៅក្នុងការកំណត់ ឡេបនីស Leibniz តាមចំនួនជាក់លាក់មួយ យើងប្រើកំណត់សំគាល់៖ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ ឬ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ ដែលវាជាសទិសសន័យរបស់ $f'(a)$។

និយមន័យ៖ អនុគមន៍ f គឺជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a បើ $f'(a)$កំណត់បាន។ វាជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) $[or(a,\infty)\ \ or(-\infty,a)\ \ or(-\infty,\infty)]$ ប្រសិនបើវាមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅលើចន្លោះបើកនោះ។

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ តើអនុគមន៍ $f(x)=|x|$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ណា ?

ដំណោះស្រាយ៖ តើអនុគមន៍ $f(x)=|x|$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ណា ?

- បើ $x>0$ នោះ $|x|=x$ យើងយកតម្លៃ h តូចល្មមដែល $x+h>0$ នាំឲ្យ $|x+h|=x+h$ ដូចនេះ

  ចំពោះ $x>0$ យើងបាន៖ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$

  $$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

  ដូចនេះវាធ្វើឲ្យ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

- បើ $x<0$ នោះ $|x|=-x$ យើងយកតម្លៃ h តូចល្មមដែល $x+h<0$ នាំឲ្យ $|x+h|=-(x+h)$ ដូចនេះ

  ចំពោះ $x<0$ យើងបាន៖ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-(x+h)-x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1$$

  ដូចនេះវាធ្វើឲ្យ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលចំពោះគ្រប់ $x<0$ ។

- ចំពោះ $x=0$ យើងសង្កេតឃើញថា៖

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)=f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$ (ប្រសិនបើវាមានលីមីត)

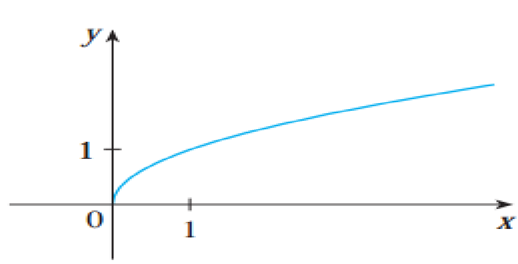
  យើងធ្វើការគណនាលីតឆ្វេង និង លីមីតស្តាំ៖

  - $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}1=1$ និង
  - $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-1)=-1$

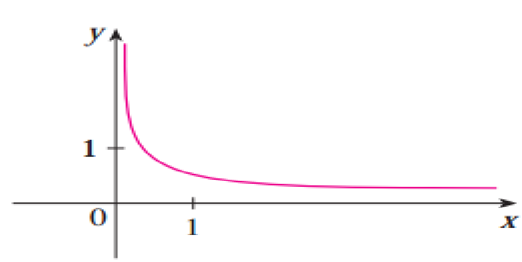
ដោយលីមីតឆ្វេង និង លីមីតស្តាំមានចម្លើយខុសគ្នា $f'(0)$ នោះកំណត់មិនបាន។ ដូចនេ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើកលែងតែ 0 ។ យើងអាចសរសេរទម្រង់របស់ f' បានដូចខាងក្រោម៖

$$f'(x)=\begin{cases}1\ , & x>0\\ -1\ , & x<0\end{cases}$$

ក្រាហ្វខាងក្រោមបង្ហាញពីឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ f



(a) $f(x)=\sqrt{x}$



(b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4 **ទ្រឹស្តីបទ៖** បើ f ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a នោះ f មានភាពជាប់នៅត្រង់ a ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដើម្បីបង្ហាញថា f មានភាពជាប់នៅត្រង់ a យើងត្រូវរកលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ។ យើងធ្វើបែបនេះដើម្បីបង្ហាញពីភាពខុសគ្នានៃ $f(x)-f(a)$ ពេលខិតទៅ 0 ។ យើងបាន៖

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

យើងគុណនឹង $f(x)-f(a)$ ដោយ $x-a$ ដែល $x\neq a$ ។ យើងបាន៖

$$f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

តាមច្បាប់ផលគុណនៃលីមីតនោះយើងអាចសរសេរបាន៖

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

$$=f'(a)\cdot 0=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

យើងបូក $f(x)$ និងដក $f(a)$ នាំឲ្យ៖

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left[f(a)+\left(f(x)-f(a)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to a}f(a)+\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]$$

$$=f(a)+0$$

$$=f(a)$$

ដូចនេះ f មានភាពជាប់ត្រង់ a ។

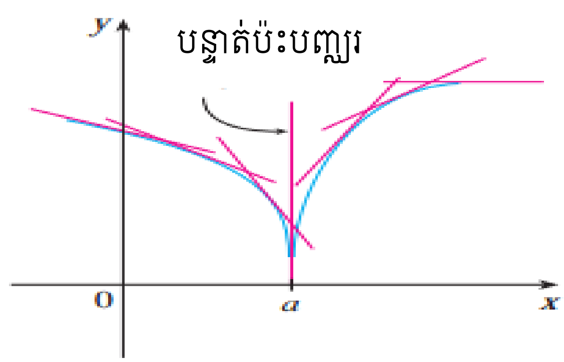
ចំណាំ៖ ការបកស្រាយតាមទ្រឹស្តីបទី៤ វាមិនត្រឹមត្រូវនោះទេ នោះគឺដោយសារវាមានអនុគមន៍ដែលមានភាពជាប់ ប៉ុន្តែគ្មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ឧទាហរណ៍ $f(x)=|x|$ អនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 0 ព្រោះ៖

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$ ។

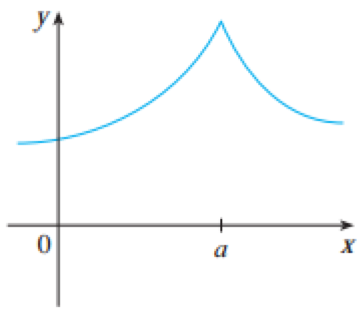
តើអនុគមន៍មួយអាចមិនមែនជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលយ៉ាងដូចម្តេច?

យើងឃើញថាអនុគមន៍ $y=|x|$ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៥ វាមិនជាប់ត្រង់ 0 ទេ។ ជាទូទៅបើក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f មាន "ជ្រុង" ឬ "កំណួច" នៅក្នុងវា នោះក្រាហ្វនៃងអនុគមន៍ f មានតង់សង់ (Tangent) នៅត្រង់ចំណុចនេះ ហើយ f មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅកន្លែងនោះឡើយ។ ទ្រឹស្តីបទទី៤ បានផ្តល់ឲ្យនូវវិធីផ្សេងទៀតចំពោះអនុគមន៍ដែលមិនមានដេរីវេ។ វាពោលថា បើ f មិនជាប់ត្រង់ a នោះ f ក៏មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a ដែរ។ ដូចនេះត្រង់ចំណុចដែលវាមិនជាប់ នោះវាមិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលទេ។

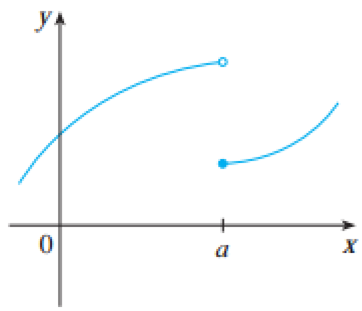
ខ្សែកោងដែលមានតង់សង់នៃបន្ទាត់ឈរ (vertical tangent line) ពេលដែល $x=a$ នោះ f ជាប់ត្រង់ a ហើយ $\lim_{x\to a}|f'(x)|=\infty$ ។



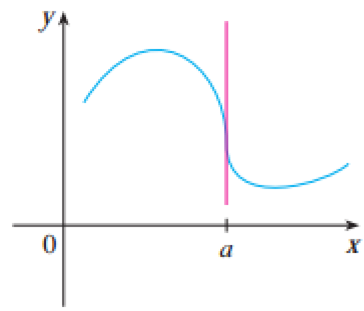
មានន័យថាបន្ទាត់តង់សង់ (Tanegnt line) កាន់តែកោងទៅៗពេលដែល $x\to a$ ។ សូមពិនិត្យមើលក្រាហ្វខាងក្រោម៖



កាចជ្រុង



ដាច់



បន្ទាត់ប៉ះបញ្ឈរ

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេទី២ គឺជាដេរីវេទី១ដែលយើងអាចសរសេរដូចតទៅ៖ $(f')'$ ឬ f''។ តាមលក្ខណៈសម្គាល់ឡេបនីស (Leibniz) យើងអាចសរសេរដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ឧទាហរណ៍ទី៦៖ បើ $f(x)=x^3-x$ ។ ចូររក និង បកស្រាយដេរីវេ $f''(x)$

ដំណោះស្រាយ៖ រក និង បកស្រាយដេរីវេ $f''(x)$ ៖

យើងមាន $f(x)=x^3-x$ នាំឲ្យ៖ $f'(x)=3x^2-1$។

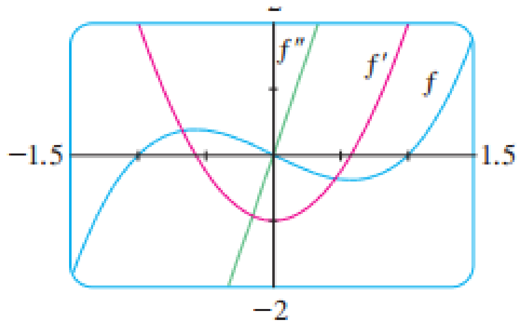
ប៉ុន្តែ $f''=f'$ យើងបាន៖ $f''(x)=(f')(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)^2-1\right]-\left[3x^2-1\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-1-3x^2+1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

សូមពិនិត្យមើលក្រាហ្វនៃ f, f' និង f''ដូចខាងក្រោម៖



យើងអាចបកស្រាយបានថា f''ប្រៀបដូចជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃខ្សែកោង $y=f'(x)$ត្រង់ចំណុច $(a,f'(x))$ ។ម្យ៉ាងទៀត វាជាអត្រាមធ្យមបម្រែបម្រួលមេគុណប្រាប់ទិសនៃខ្សែកោងដើម $y=f(x)$ ។

តាមក្រាហ្វខាងលើយើងសម្គាល់ឃើញថា f'' អវិជ្ជមាន នៅពេលដែល $y=f'(x)$មានមេគុណប្រាប់ទិសអវិជ្ជមាន និង f''វិជ្ជមាន នៅពេលដែល $y=f'(x)$មានមេគុណប្រាប់ទិសវិជ្ជមាន។ ដូចនេះ ក្រាហ្វផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងការគណនារបស់យើង។

ដេរីវេទី៣ គឺជាដេរីវេទី២ដែលយើងអាចសរសេរដូចតទៅ៖ $f'''=f''$ ។ តាមលក្ខណៈសម្គាល់ឡេបនីស (Leibniz) យើងអាចសរសេរដេរីវេទី៣ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\boxed{y'''=f'''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}}$$

ចំពោះដេរីវេ គឺយើងដំណើរការបន្តបន្ទាប់គ្នា។

ចំពោះដេរីវេទី៤ f''''ជាធម្មតាគេកំណត់សរសេរដោយ $f^{(4)}$។

ចំពោះដេរីវេទី n កំណត់សរសេរដោយ៖ $f^{(n)}$។ បើ $y=f(x)$ នោះដេរីវេទី n កំណត់បានដូចខាងក្រោម៖

$$\boxed{y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧៖ បើ $f(x)=x^3-x$ ។ ចូររក $f'''(x)$ $f^{(4)}(x)$

ដំណោះស្រាយ៖ រក $f'''(x)$ $f^{(4)}(x)$៖

យើងមាន $f(x)=x^3-x$ នាំឲ្យ៖ $f'(x)=3x^{2-1}$

$$\Rightarrow f''(x)=6x$$

$$\Rightarrow f'''(x)=6$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x)=0$$

លំហាត់៖

1. ចូរប្រើក្រាហ្វដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោមដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃដេរីវេ រួចសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ f' នោះ៖

ក). a). $f'(-3)$

b). $f'(-2)$

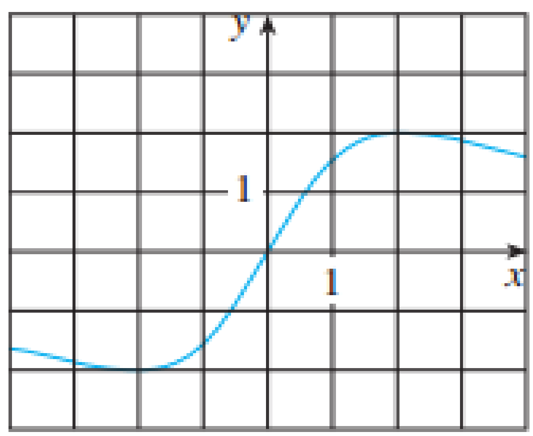
c). $f'(-1)$

d). $f'(0)$

e). $f'(1)$

f). $f'(2)$

g). $f'(3)$ ។



ខ). a). $f'(0)$

b). $f'(1)$

c). $f'(2)$

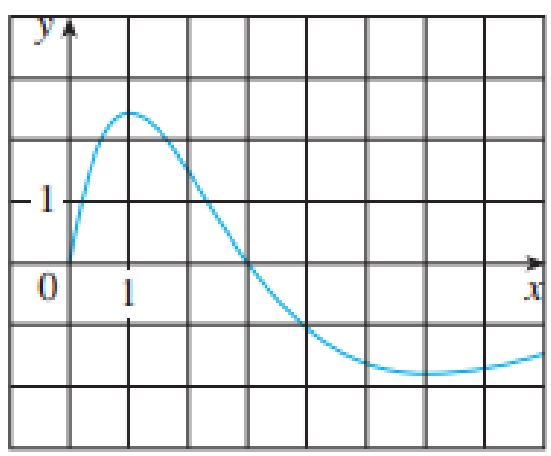
d). $f'(3)$

e). $f'(4)$

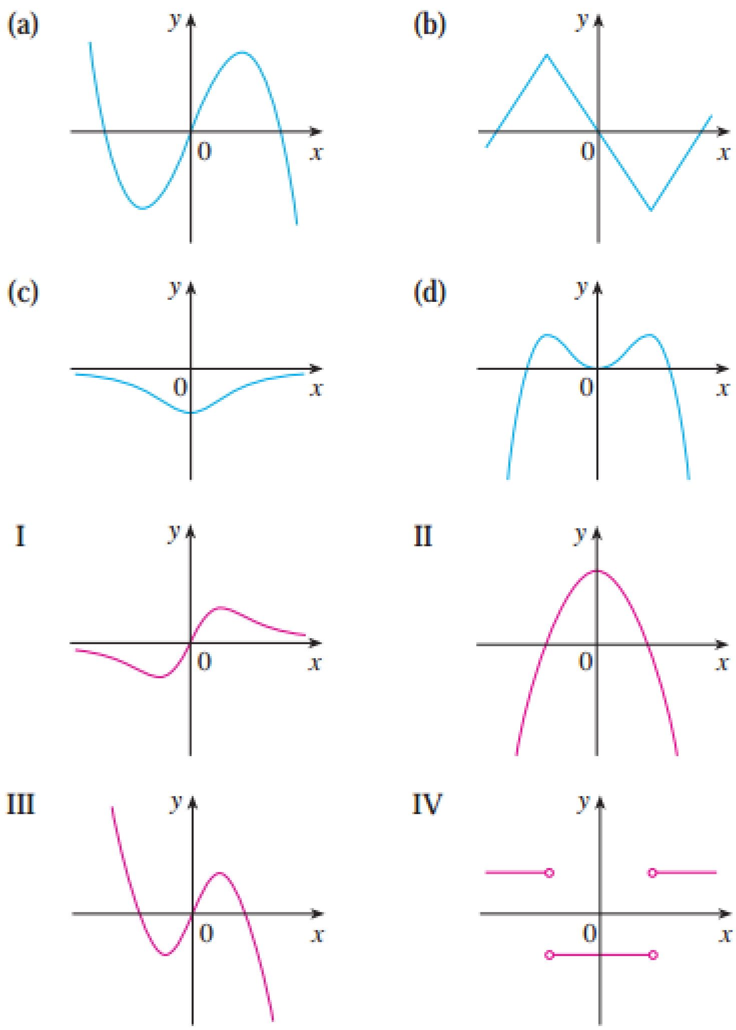
f). $f'(5)$

g). $f'(6)$

h). $f'(7)$ ។

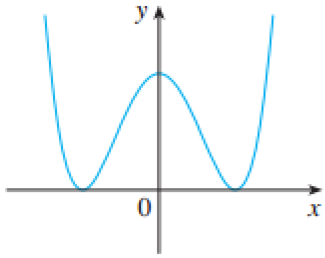


2. ចូរផ្គូរផ្គងក្រាបនៃអនុគមន៍នីមួយៗពី $(a)-(d)$ ជាមួយក្រាហ្វនៃដេរីវេពី $I-IV$ រួចប្រាប់ពីមឲហេតុផលរបស់អ្នកក្នុងការជ្រើសរើសនោះ៖

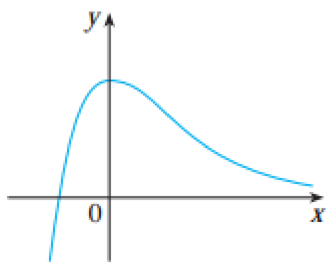


3. ចូរដាន ឬ ចម្លងក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោម (សន្មតថាអ័ក្សមានមាត្រដ្ឋានស្មើគ្នា) រួចសង់ក្រាហ្វនៃ f'៖

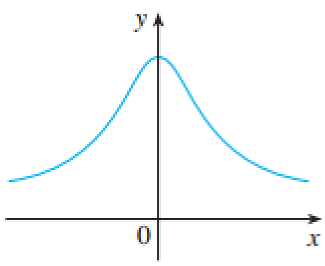
ក).



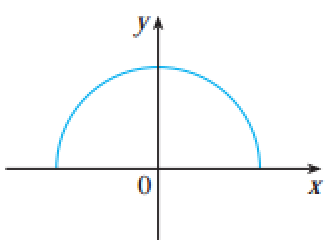
ខ).



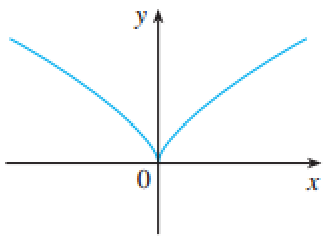
គ).



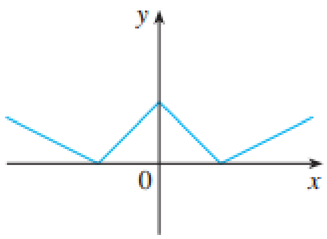
ឃ).



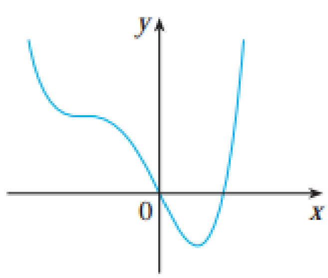
ង).



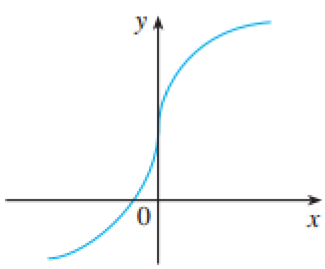
ប).



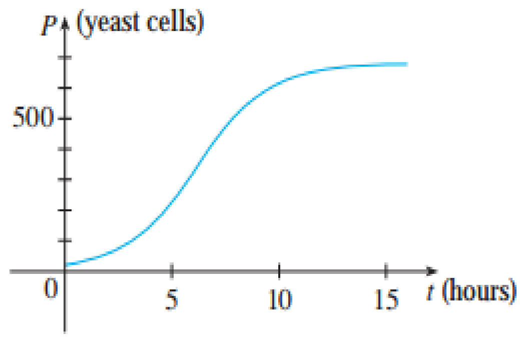
ឆ).



ជ).



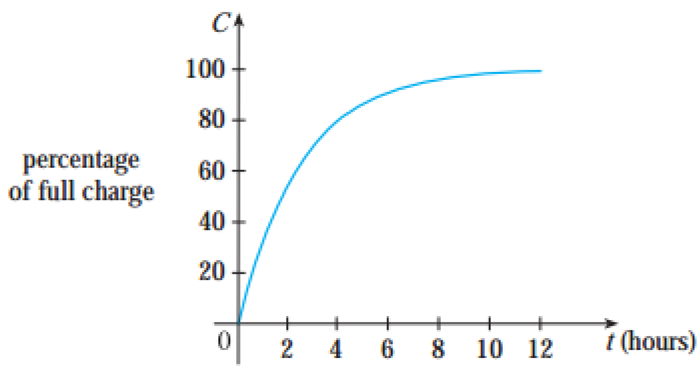
4. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីអនុគមន៍នៃប្រជាជន $P(t)$ ដែលជាំកោសិកាផ្សិតដំបែនៅក្នុងវប្បធម៌មន្ទីរពិសោធន៍មួយ។ ចូរសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ $P'(t)$។ តើក្រាហ្វនៃដេរីវេ $P'(t)$ ប្រាប់ឲ្យយើងដឹងអ្វីខ្លះពីផ្សិតដំបែរបស់ប្រជាជន។



5. ថ្មបញ្ចូលភ្លើងត្រូវបានសាកដោយឆ្នាំងសាក។ ក្រាហ្វ $C(t)$ បង្ហាញពីភាគរយនៃចំណុះពេញរបស់ថ្មជាអនុគមន៍នៃពេល t ដែលកន្លងទៅ(គិតជាម៉ោង)។

ក). តើដេរីវេ $C'(t)$ មានន័យដូចម្តេច ?

ខ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ $C'(t)$ ។ តើក្រាហ្វនៃដេរីវេ $C'(t)$ ប្រាប់អ្វីខ្លះដល់យើង ?

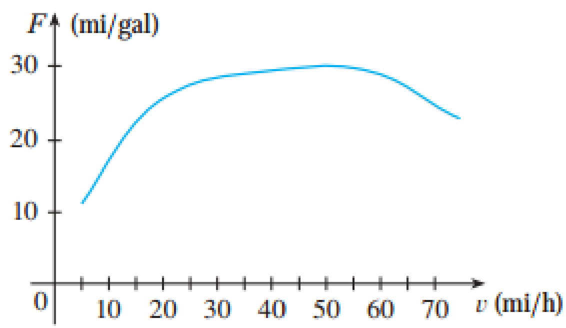


6. ក្រាហ្វ(ពីក្រសួងថាមពលនៃសហរដ្ឋអាមេរិច) បង្ហាញពីល្បឿនបើកបរដែលផ្តល់ផលប៉ះពាល់លើហ្គាស។ សេដ្ឋកិច្ចឥន្ធនៈគិតជាម៉ាយក្នុងមួយកាឡុង (Gallon) និងល្បឿនគិតជាម៉ាយក្នុងមួយម៉ោង។

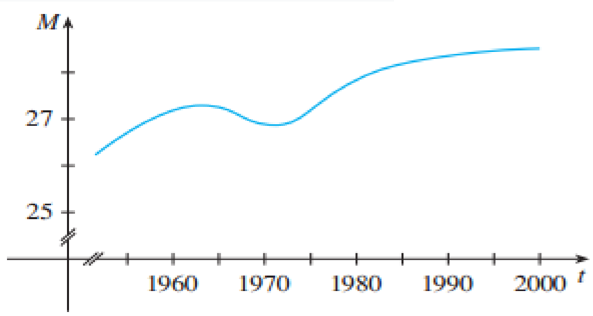
ក). តើដេរីវេ $F'(t)$ មានន័យដូចម្តេច ?

ខ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ $F'(t)$ ។

គ). តើអ្នកគួរបើកបរល្បឿនប៉ុន្មាន ដើម្បីរក្សាហ្គាស ?



7. ក្រាហ្វបង្ហាញពីអាយុជាមធ្យមនៃអាពាហ៍ពិពាហ៍ដំបូងរបស់បុរសជនជាតិជប៉ុនផ្សេងគ្នានៅពាក់កណ្ដាលចុងក្រោយនៃសតវត្សទី ២០។ ចូរសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ $M'(t)$ ។ ក្នុងកំឡុងពេលនោះ តើឆ្នាំណាដែលដេរីវេមានតម្លៃអវិជ្ជមាន ?



8. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ f' នៅខាងក្រោមក្រាហ្វនៃអនុគមន៍តាមវិធីដូចគ្នា។ តើអ្នកអាចទស្សន៍ទាយពីរាងរបស់ដេរីវេពីក្រាហ្វនៃដេរីវេ $f'(x)$ បានដែររឺទេ ?

   ក). $f(x)=\sin x$

   ខ). $f(x)=e^x$

   គ). $f(x)=\ln x$ ។

9. ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ។ បង្ហាញពីដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ និង ដែនកំណត់របស់ដេរីវេ៖

   ក). $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$

   ខ). $f(x)=mx+b$

   គ). $f(t)=5t-9t^2$

   ឃ). $f(x)=1.5x^2-x+3.5$

   ង). $f(x)=x^2-2x^3$

ឋ). $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

ឆ). $g(x)=\sqrt{9-x}$

ជ). $f(x)=\frac{x^2-1}{2x+3}$

ឈ). $G(t)=\frac{1-2t}{3+t}$

ញ). $f(x)=x^{3/2}$

ដ). $f(x)=x^4$

10. ក). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{6-x}$ ដោយចាប់ផ្តើមជាមួយអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ។

ខ). ចូរប្រើក្រាហ្វពីសំណួរ (ក) ដើម្បីសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេ f' ។

គ). ចូរប្រើនិយមន័យដេរីវេ ដើម្បីរក $f'(x)$ ។ រកដែនកំណត់នៃ f និង f' ។

ឃ). ប្រើឧបករណ៍ដើម្បីសង់ក្រាហ្វ f' រួចប្រៀបធៀបជាមួយក្រាហ្វនៅក្នុងសំណួរ (ក)។

11. ក). បើអនុគមន៍ $f(x)=x^4+2x$ ។ចូររកដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ). ពិនិត្យមើលចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងសំណួរ (ក) ដើម្បីប្រៀបធៀបគ្នារវាងក្រាហ្វនៃ f និង f' ។

12. ក). បើអនុគមន៍ $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ។ចូររកដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ). ពិនិត្យមើលចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងសំណួរ (ក) ដើម្បីប្រៀបធៀបគ្នារវាងក្រាហ្វនៃ f និង f' ។

13. អត្រាអ្នកគ្មានការងារធ្វើ $U(t)$ វាមិនទៀងតាមពេលវេលា។ តារាង (ពីការិយាល័យស្ថិតិការងារ) បានផ្តល់ពីភាគរយនៃអ្នកគ្មានការងារធ្វើនៅក្នុងការងារពលកម្មនៃសហរដ្ឋអាមេរិចពី 1999 ឆ្នាំដល់ 2008 ។

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1999	4.2	2004	5.5
2000	4.0	2005	5.1
2001	4.7	2006	4.6
2002	5.8	2007	4.6
2003	6.0	2008	5.8

ក). តើដេរីវេ $U'(t)$ មានន័យដូចម្តេច? តើវាមានអ្វីខ្លះ?

ខ). ចូរបង្កើតតារាង ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $U'(t)$ ។

14. តាង $P(t)$ ជាភាគរយនៃអាយុក្រោម18 ឆ្នាំរបស់ប្រជាជននៃសហរដ្ឋអាមេរិចនៅខណៈពេល t ។តារាងបានផ្តល់នូវតម្លៃនៃអនុគមន៍ឆ្នាំស្រង់ចំនួនប្រជាជនពីឆ្នាំ 1950 ដល់ឆ្នាំ 2000 ។

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

ក). តើដេរីវេ $P'(t)$ មានន័យដូចម្តេច? តើវាមានអ្វីខ្លះ?

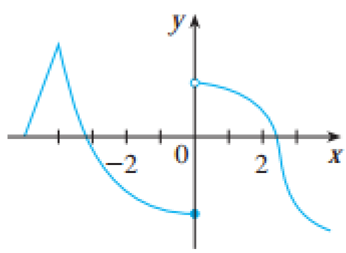
ខ). ចូរបង្កើតតារាង ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $P'(t)$ ។

គ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃ P និង P' ។

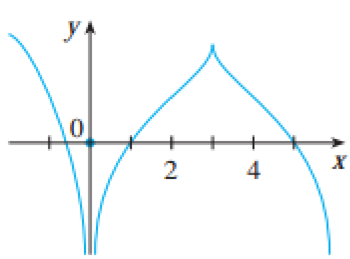
ឃ). តើយើងអាចធ្វើយ៉ាងដូចម្តេច ដើម្បីទទួលបានតម្លៃនៃ $P'(t)$ កាន់តែត្រឹមត្រូវ?

15. គេឲ្យក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។ ចូរបកស្រាយពីហេតុផលពីចំនួនដែលនៅត្រង់ f មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

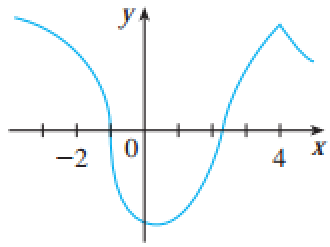
ក).



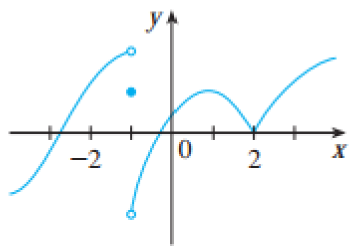
ខ).



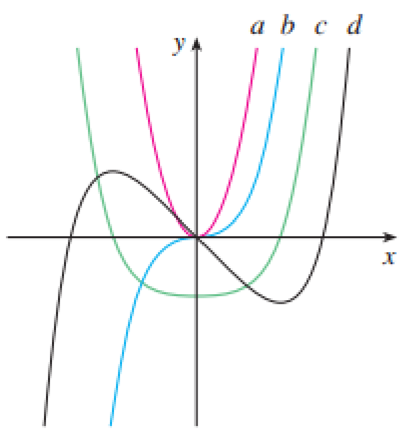
គ).



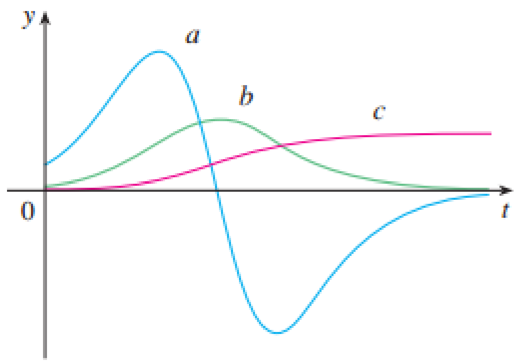
ឃ).



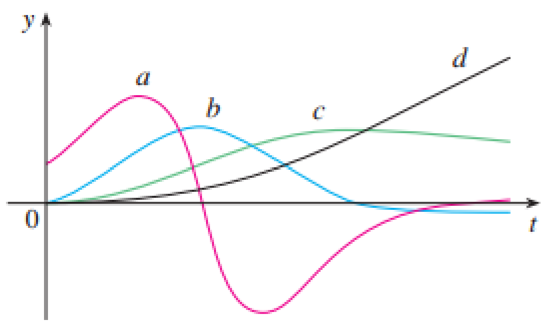
16. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីក្រាហ្វនៃ f, f', f'', និង f'''។ ចូរបញ្ជាក់ពីខ្សែកោងនៃអនុគមន៍នីមួយៗនិងពន្យល់ពីជម្រើសទាំនោះ។



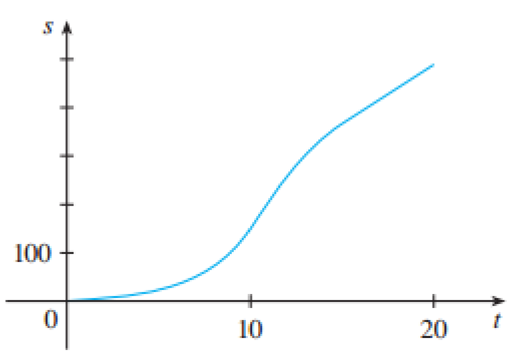
17. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីក្រាហ្វនៃបីអនុគមន៍។ មួយបង្ហាញពីអនុគមន៍នៃទីតាំងឡាន មួយបង្ហាញពីល្បឿនឡាន និងមួយទៀតបង្ហាញពីការបង្កើនល្បឿនរបស់ឡាន។ ចូរបញ្ជាក់ពីខ្សែកោងនៃអនុគមន៍នីមួយៗ និងពន្យល់ពីជម្រើសទាំងនោះ។



18. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីក្រាហ្វនៃបួនអនុគមន៍។ មួយបង្ហាញពីអនុគមន៍នៃទីតាំងឡាន មួយបង្ហាញពីល្បឿនឡាន មួយទៀតបង្ហាញពីការបង្កើនល្បឿនរបស់ឡាន និងមួយទៀតបង្ហាញពីរំញោចរបស់ឡាន។ ចូរបញ្ជាក់ពីខ្សែកោងនីមួយៗ និង ពន្យល់ពីជម្រើសទាំងនោះ។



19. ក). ក្រាហ្វបង្ហាញពីអនុគមន៍នៃទីតាំងឡានដែល s គិតជាហ្វីត ($feet$) និងគិតជាវិនាទី (s) ។ ចូរប្រើក្រាហ្វនោះ ដើម្បីសង់ក្រាហ្វនៃល្បឿន និង ការបង្កើនល្បឿនរបស់ឡាន។ តើការបង្កើនល្បឿនរបស់ឡានស្មើនឹងប៉ុន្មាននៅខណៈពេល $t=10s$?



ខ). ចូរប្រើក្រាហ្វនៃការបង្កើនល្បឿន ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃពីរំញោចរបស់ឡាននៅខណៈពេល។ តើរំញោចរបស់ឡានមានអ្វីខ្លះ?

20. ក). បើ $g(x)=x^{2/3}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $g'(0)$ គញមានដេរីវេ។

ខ). បើ $a \neq 0$ ។ ចូររក $g'(a)$ ។

គ). ចូរបង្ហាញថាមានបន្ទាត់តង់សង់ឈរ (vertical tangent line)ត្រង់ចំណុច $(0,0)$ ។

ឃ). ចូរពន្យល់សំណួរ (គ) ដោយសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y = ^{2/3}$ ។

21. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x) = |x-6|$ មិនមានដេរីវេត្រង់ 6 ។ ចូររករាងរបស់ដេរីវេ f'រួចសង់ក្រាហ្វរបស់វា។

22. តើអនុគមន៍ផ្នែកគត់ $f(x) = [[x]]$ មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ណា? ។ ចូររករាងរបស់ដេរីវេ f'រួចសង់ក្រាហ្វរបស់វា។

23. ក). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x) = x|x|$ ។

ខ). តើ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ណា?

គ). ចូររករាងរបស់ដេរីវេ f' ។

24. ដេរីវេខាងឆ្វេងដៃ និង ខាងស្តាំដៃនៃអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ៖

$f_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ និង $f_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ បើវាមានលីមីត។ ហើយមានដេរីវេ $f'(a)$លុះត្រាតែដេរីវេខាងឆ្វេងដៃ និង ខាងស្តាំដៃមានតម្លៃស្មើគ្នា។

ក). ចូររក $f'_-(4)$ និង $f'_+(4)$ នៃអនុគមន៍៖

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{បើ } x \le 0 \text{ x} \\ 5-x & \text{បើ } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{បើ } x \ge 4 \end{cases}$$

ខ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

គ). តើ f មិនមានភាពជាប់នៅត្រង់ណា?

ឃ). តើ f មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ណា?

25. អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍គូ បើ $f(-x) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅក្នុងដែនកំណត់របស់វា និងវាជាអនុគមន៍គូ បើ $f(-x) = -f(x)$ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។ ចូរស្រាយបង្ហាញក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

ក). ដេរីវេនៃអនុគមន៍គូ គឺជាអនុគមន៍សេស។

ខ). ដេរីវេនៃអនុគមន៍សេស គឺជាអនុគមន៍គូ។

26. នៅពេលដែលបើកក្បាលម៉ាស៊ីនទឹកក្តៅ សីតុណ្ហភាព T នៃទឹកវាអាស្រ័យលើរយៈពេលដែលទឹកបានដំណើរការ។

ក). ចូរសង់ក្រាហ្វ T ដែលអាចជាអនុគមន៍ពេលដែលកន្លងផុតទៅ ចាប់តាំងពីក្បាលម៉ាស៊ីនទឹកក្តៅបានចាប់ផ្តើមបើក។

ខ). ចូរពណ៌នាពីអត្រាបម្រែបម្រួលនៃ T ដែលវាអាស្រ័យទៅលើពេល t ផ្សេងៗគ្នា ក្នុងពេលដែល t កើនឡើង។

គ). ចូរសង់ក្រាហ្វដេរីវេនៃ T ។

27. តាង ℓ ជាបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ ត្រង់ចំណុច $(1,1)$ ។ មុំទំនោរនៃ ℓ គឺមុំ ϕ ដែល ℓ ស្របតាមទិសដៅវិជ្ជមាននៃអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ ចូរគណនាមុំ ϕ ។

រំលឹក

ពិនិត្យគំនិត៖

1. ចូរពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម និង បកស្រាយតាមក្រាហ្វ៖

ក). $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ខ). $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

គ). á$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

ឃ). $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

ង). $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ ។

2. ចូរបកស្រាយពីវិធីឲ្យបានបួន ឬ ប្រាំដែលអាចធ្វើឲ្យលីមីតមិនអាចមាន រួចបកស្រាយវាតាមក្រាហ្វ។

3. ចូរពន្យល់ពីច្បាប់លីមីតខាងក្រោម៖

ក). ច្បាប់ផលបូក

ខ). ច្បាប់ផលដក

គ). ច្បាប់ពហុគុណថេរ

ឃ). ច្បាប់ផលគុណ

ង). ច្បាប់ផលចែក

ច). ច្បាប់ស្វ័យគុណ

ឆ). ច្បាប់ឫស។

4. តើទ្រឹស្តីបទច្របាច់(Squeeze Theorem) ពោលដូចម្តេច?

5. ក). តើបន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរ $x=a$ នៃអនុគមន៍ខ្សែកោង $y=f(x)$ មានន័យដូចម្តេច? ចូរសង់ខ្សែកោង ដើម្បីបកស្រាយពីលទ្ធភាពផ្សេងៗគ្នារបស់វា (Draw the curve to illustrate the various possbities).។

   ខ). តើបន្ទាត់អាស៊ីមតូត $y=L$ នៃអនុគមន៍ខ្សែកោង $y=f(x)$ មានន័យដូចម្តេច? ចូរសង់ខ្សែកោង ដើម្បីបកស្រាយពីលទ្ធភាពផ្សេងៗគ្នារបស់វា (Draw the curve to illustrate the various possbities).។

6. តើអនុគមន៍នៃខ្សែកោងខាងក្រោម មួយណាមានមានអាស៊ីមតូតឈរ និង មួយណាមានអាស៊ីមតូតដេក?៖

   ក). $y=x^4$ ខ). $y=\sin x$

   គ). $y=\tan x$ ឃ). $y=\tan^{-1} x$

   ង). $y=e^x$ ច). $y=\ln x$

   ឆ). $y=\dfrac{1}{x}$ ជ). $y=\sqrt{x}$ ។

7. ក). តើ f មានភាពជាប់ត្រង់ a មានន័យដូចម្តេច?

   ខ). តើ f មានភាពជាប់នៅចន្លោះ $(-\infty,\infty)$ មានន័យដូចម្តេច? តើអ្នកនិយាយដូចម្តេច ចំពោះខ្សែកោងនៃអនុគមន៍?

8. តើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (Intermediate Value Theorem) ពោលដូចម្តេច?

9. ចូរសរសេរបញ្ជាក់ពីមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ ត្រង់ចំណុច $(a, f(a))$ ។

10. ឧបមាថា វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមបន្ទាត់ត្រង់ ជាមួយទីតាំង $f(t)$ នៅខណៈពេល t ។ ចូរសរសេរបញ្ជាក់ពីល្បឿនខណៈនៃវត្ថុនៅខណៈពេល $t=a$ ។ តើអ្នកអាចបកស្រាយល្បឿននេះយ៉ាងដូចម្តេច តាមក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ?
11. បើ $y=f(x)$ និង x ប្រែប្រួលពី x_1 ទៅ x_2 ។ ចូរសរសេរបញ្ជាក់ពីក្នុងករណីដូចខាងក្រោម៖

    ក). អត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ y ដែលអាស្រ័យលើ x នៅលើចន្លោះ $[x_1, x_2]$ ។

    ខ). អត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃ y ដែលអាស្រ័យលើ x ត្រង់ $x=x_1$ ។
12. ចូរកំណត់ដេរីវេ $f'(a)$ ។ ចូរពិភាក្សាតាមពីរវិធី ក្នុងការបកស្រាយចំនួននេះ។
13. ចូរកំណត់ដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ f ។ បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍នៃទីតាំងរបស់ភាគល្អិត តើអ្នកអាចបកស្រាយដេរីវេទី២ បានយ៉ាងដូចម្តេច ?
14. ក). តើ f មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a មានន័យដូចម្តេច ?

    ខ). តើរវាង ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងភាពជាប់នៃអនុគមន៍មានទំនាក់ទំនងគ្នាយ៉ាងដូចម្តច ?

    គ). ចូរសង់ក្រាហ្វមួយដែលមានភាពជាប់ ប៉ុន្តែមិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ $a=2$ ។
15. ចូរព័ណ៌នាពីបួន ឬ ប្រាំវិធី អំពីអនុគមន៍ដែលមិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល រួចបកស្រាយតាមក្រាហ្វ។

តេស្តពិត ឬ មិនពិត

ចូរកំណត់ថា ករណីនីមួយៗខាងក្រោមពិត ឬ មិនពិត។ បើពិត ចូរពន្យល់ និង បើមិនពិតចូរពន្យល់ ឬ ផ្តល់ជាឧទាហរណ៍ដែលបង្ហាញថាវាមិនពិត៖

1. $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x}{x-4}-\lim\limits_{x\to4}\dfrac{8}{x-4}$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+6x-7\right)}{\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+5x-6\right)}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}\left(x-3\right)}{\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+2x-4\right)}$
4. បើ $\lim\limits_{x\to5}f(x)=2$ និង $\lim\limits_{x\to5}g(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to5}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ គ្មានលីមីត។

5. បើ $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ និង $\lim_{x\to 5} g(x)=0$ នោះ $\lim_{x\to 5}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ គ្មានលីមីត។
6. បើ $\lim_{x\to a} f(x)$ និង $\lim_{x\to a} g(x)$ គ្មានលីមីតដូចគ្នានោះ $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$ ក៏មិនមានលីមីត។
7. បើ $\lim_{x\to a} f(x)$ មានលីមីត ប៉ុន្តែ $\lim_{x\to a} g(x)$ គ្មានលីមីតនោះ $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$ គ្មានលីមីតទេ។
8. បើ $\lim_{x\to 6}\left[f(x)g(x)\right]$ នោះលីមីតមានចម្លើយ $f(6)g(6)$ ។
9. បើ p ជាពហុធានោះ $\lim_{x\to b} p(x)=p(b)$ ។
10. បើ $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$ និង $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$ នោះ $\lim_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]=0$ ។
11. អនុគមន៍មួយអាចមានអាស៊ីមតូតដេកពីរខុសគ្នា។
12. បើ f មានដែនកំណត់ $[0,\infty)$ និងគ្មានអាស៊ីមតូតដេក នោះ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ឬ $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ។
13. បើបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគនមន៍ $y=f(x)$ នោះ f មិនកំណត់ត្រង់ 1 ។
14. បើ $f(1)>0$ និង $f(3)<0$ នោះវាមានចំនួន c នៅចន្លោះ 1 និង 3 ដែល $f(c)=0$ ។
15. បើ f មានភាពជាប់ត្រង់ 5 និង $f(5)=2$ និង $f(4)=3$ នោះ $\lim_{x\to 2} f\left(4x^2-11\right)=2$ ។
16. បើ f មានភាពជាប់លើចន្លោះ $[-1,1]$ និង $f(-1)=4$ និង $f(1)=3$ នោះវាមានចំនួន r ដែល $|r|<1$ និង $f(r)=\pi$ ។
17. តាង f ជាអនុគមន៍ដែល $\lim_{x\to 0} f(x)=6$ ។ វាមានចំនួន δ ដែលបើ $0<|x|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-6|<1$ ។
18. បើ $f(x)>1$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ មានលីមីតនាំឲ្យ $\lim_{x\to 0} f(x)>1$ ។
19. បើ f ជាប់ត្រង់ a នោះ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a ដែរ។
20. បើ $f'(r)$ មានដេរីវេ នាំឲ្យ $\lim_{x\to r} f(x)=f(r)$ ។
21. $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
22. សមីការៈ $x^{10}-10x^2+5=0$ មានឫសមួយនៅចន្លោះ $(0,2)$ ។
23. បើ f ជាប់ត្រង់ a ដូចនេះគឺ $|f|$ ។
24. បើ $|f|$ ជាប់ត្រង់ a ដូចនេះគឺ f ។

លំហាត់

1. គេឲ្យក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម។

ក). ចូរលីមីត និងពន្យល់ពីមូលហេតុបើវាគ្មានលីមីត៖

a). $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ b). $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

c). $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ d). $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

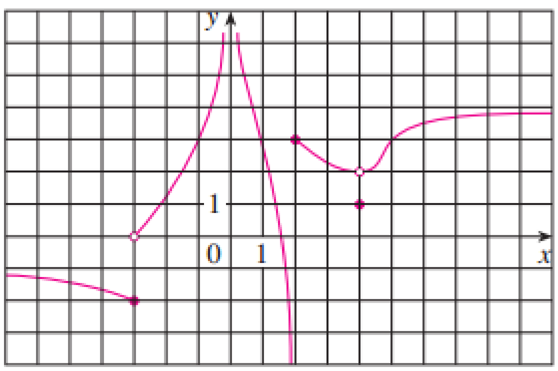
e). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ f). $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

g). $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ h). $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ខ). ចូរពន្យល់ពីសមីការអាស៊ីមតូតដេក។

គ). ចូរពន្យល់ពីសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

ឃ). តើអនុគមន៍មិនមានភាពជាប់នៅត្រង់ណា? ចូរពន្យល់។



2. ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2,\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty,$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$

ដែល f ជាប់នៅខាងស្ដាំត្រង់ 3។

3. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក). $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-x}$

ខ). $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

គ). $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

ឃ). $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

ង). $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

ច). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

ឆ). $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

ជ). $\lim\limits_{v\to 4^+}\dfrac{4-v}{|4-v|}$

ឈ). $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

ញ). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

ដ). $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

ឋ). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

ដ). $\lim\limits_{x\to \pi^-}\ln(\sin x)$

ឍ). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

ណ). $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

ត). $\lim\limits_{x\to \infty}e^{x-x^2}$

ថ). $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ទ). $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

4. ចូរប្រើក្រាហ្វ ដើម្បីស្វែងយល់ពីអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង រួចបកស្រាយពីអ្វីដែលអ្នកបានរកឃើញ។ អនុគមន៍មានដូចខាងក្រោម៖

ក). $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

ខ). $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$ ។

5. ចូររកលីមីត $\lim_{x \to 1} f(x)$ បើ $2x - 1 \le f(x) \le x^2$ ចំពោះ $0 < x < 3$ ។

6. ចូរបង្ហាញថា $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ ។

7. ដោយប្រើនិយមន័យនៃលីមីត ចូរស្រាយលីមីតខាងក្រោម៖

ក). $\lim_{x \to 2}(14 - 5x) = 4$

ខ). $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

គ). $\lim_{x \to 2}\left(x^2 - 3x\right) = -2$

ឃ). $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$ ។

8. តាង

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{បើ } x < 0 \\ 3 - x & \text{បើ } 0 \le x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{បើ } x > 3 \end{cases}$$

ក). គណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

a). $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ b). $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ c). $\lim_{x \to 0} f(x)$

d). $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ e). $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ f). $\lim_{x \to 3} f(x)$

ខ). តើ f មិនជាប់នៅត្រង់ណា ?

គ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

9. តាង

បើ $0 \le x \le 2$

បើ $2 < x \le 3$

បើ $3 < x < 4$

បើ $x \ge 4$

$$g(x)=\begin{cases}2x-x^2\\ 2-x\\ x-4\\ \pi\end{cases}$$

ក). ចំពោះចំនួននីមួយៗ $2,\ 3,$ និង 4 តើមានភាពជាប់នៅខាងឆ្វេង ឬ ខាងស្តាំ? ឬ វាមានភាពជាប់នៅត្រង់ចំនួននោះ។

ខ). ចូរសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ g ។

10. បង្ហាញថាអនុគមន៍មានភាពជាប់នៅលើដែនកំណត់ រួចរកដែនកំណត់របស់វា៖

ក). $h(x)=xe^{\sin x}$ ខ). $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

11. ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម ដើម្បីបង្ហាញថាសមីការមានឬសមួយនៅចន្លោះដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោម៖

ក). $x^5-x^3+3x-5=0,\ (0,2)$

ខ). $\cos\sqrt{x}=e^x-2,\ (0,1)$

12. ក) ចូររកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (Tangent line) ទៅខ្សែកោង $y=9-2x^2$ ត្រង់ចំណុច $(2,1)$ ។

ខ). ចូររកសមីការនៃបន្ទាត់ (Tangent line) នោះ។

13. ចូររកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line)ទៅខ្សែកោង $y=\dfrac{2}{1-3x}$ នៅត្រង់ចំណុចនៃអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ 0 និង -1។

14. បម្លាស់ទី (គិតជាម៉ែត្រ) របស់វត្ថុមួយផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ត្រង់មួយដែលឲ្យដោយសមីការ៖ $s=1+2t+\frac{1}{4}t^2$ ដែល t គិតជាវិនាទី៖

ក). ចូររកល្បឿនមធ្យមក្នុងរយៈពេលនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

a). $[1,3]$ b). $[1,2]$

c). $[1,1.5]$ d). $[1,1.1]$ ។

ខ). ចូររកល្បឿនខណៈ នៅខណៈពេល $t=1$។

15. យោងតាមច្បាប់ប៊ិយ (Boye's Law) ប្រសិនបើសីតុណ្ហភាពត្រូវបានបង្ខាំងទុកនោះឧស្ម័នតរក្សាទុកឲ្យនៅថេរ បន្ទាប់មកសម្ពាធ P និង មាឌV ក៏ថេរដែរ។ ឧបមាថា សម្រាប់ឧស្ម័នជាក់លាក់មួយគឺ $PV = 800$ ដែល P គិតជាផោនក្នុងមួយអ៊ីញការេ $\left(pound / in^2\right)$ និង V គិតជាអ៊ីញគូប $\left(in^3\right)$ ។

ក). ចូរកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ P ដូចដែលV កើនឡើងពី $200in^3$ ទៅ $250in^3$ ។

ខ). ចូរបញ្ជាក់ថា V ជាអនុគមន៍នៃ P និងបង្ហាញថាអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃV ដែលអាស្រ័យលើ P គឺច្រាសសមាមាត្រនឹងការេនៃ P ។

16. ក). ចូរប្រើនិយមន័យនៃដេរីវេ ដើម្បីរក $f'(2)$ ដែល $f(x) = x^3 - 2x$ ។

ខ). ចូររកសមីការនៃបន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) ទៅខ្សែកោង $y = x^3 - 2x$ នៅត្រង់ចំណុច $(2,4)$ ។

គ). ចូរបង្ហាញសំណួរ (ខ) ដោយប្រើក្រាហ្វនៃខ្សែកោង និង បន្ទាត់តង់សង់ (Tangent line) នៅលើអេក្រង់ដូចគ្នា (សំណួរ គ នេះ គេប្រើកុំព្យូទ័រ)

17. ចូររកអនុគមន៍ f និង a តម្លៃ បើគេឲ្យ៖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$ ។

18. តម្លៃសរុបនៃការសងប្រាក់កម្ចីរបស់សិស្សក្នុងការអត្រាការប្រាក់ $r\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំគឺ $C = f(r)$ ។

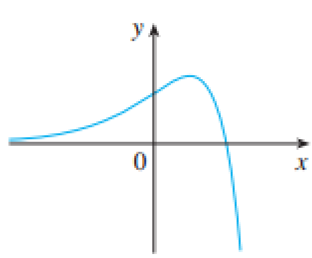
ក). តើដេរីវេ $f'(r)$ មានន័យដូចម្តេច ? តើវាមានអ្វីខ្លះ (What are its units ?) ?

ខ). តើ $f'(10) = 1200$ មានន័យដូចម្តេច ?

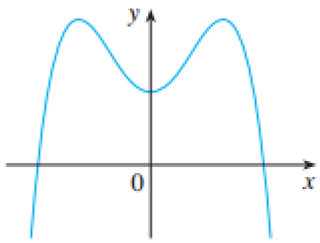
គ). តើ $f'(r)$ វិជ្ជមានជានិច្ច ឬ ប្រែប្រួលសញ្ញា ?

19. គូសក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមឡើងវិញ រួចសង់ក្រាហ្វនៃដេរីវេនៅពីក្រោមវាផ្ទាល់៖

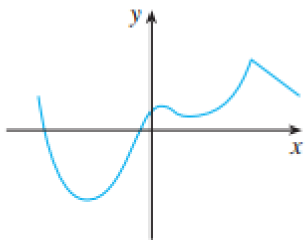
ក).



ខ).



គ).



20. ក). បើ $f(x)=\sqrt{3-5x}$ ។ ចូរប្រើនិយមន័យដេរីវេ ដើម្បីរក $f'(x)$។

ខ). ចូររកដែនកំណត់នៃ f និង f'។

គ). ចំពោះក្រាហ្វនៃនិងគីនៅលើអេក្រង់ធម្មតា។ ចូរប្រៀបធៀបក្រាហ្វ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយរបស់អ្នកនៅក្នុងសំណួរ (ក) (សំណួរ គ នេះ ប្រើកុំព្យូទ័រដើម្បីដោះស្រាយ)។

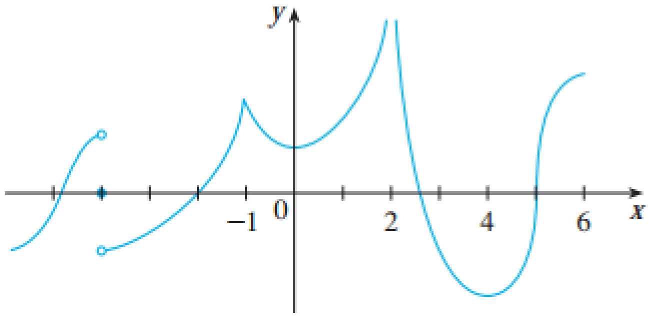
21. ក). ចូររកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4-x}{3+x}$ និងប្រើអាស៊ីមតូតនោះ ដើម្បីសង់ក្រាហ្វ។

ខ). ចូរប្រើក្រាហ្វដែលបានសង់ក្នុងសំណួរ (ក) ដើម្បីសង់ក្រាហ្វនៃ f'។

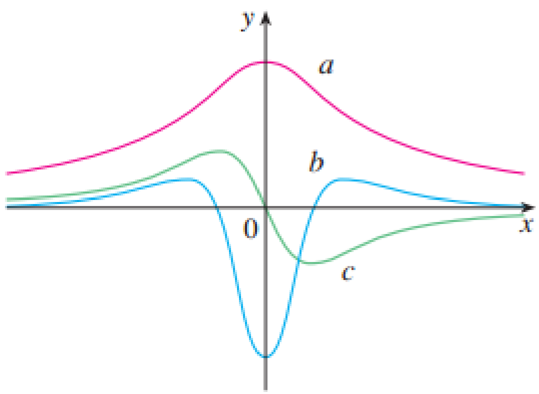
គ). ចូរប្រើនិយមន័យដេរីវេ ដើម្បីរក $f'(x)$។

ឃ). ចូរប្រើឧបករណ៍សង់ក្រាហ្វ(ក្នុងកុំព្យូទ័រ) ដើម្បីសង់ក្រាហ្វនៃ f'រួចប្រៀបធៀបគ្នាជាមួយសំណួរ (ខ)។

22. គេមានក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម។ ចូរបកស្រាយពីមូលហេតុដែល f មិនមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល។



23. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីក្រាហ្វនៃ f, f', និង f''។ ចូរបញ្ជាក់ពីខ្សែកោងនៃអនុគមន៍នីមួយៗ និង ពន្យល់ពីជម្រើសទាំងនោះ។



24. តាង $C(t)$ គឺជាតម្លៃសរុបនៃរូបិយប័ណ្ណនៃសហរដ្ឋអាមេរិច (គិតជាពាន់លានដុល្លា) (កាក់ និង ធនាគារប័ណ្ណ) ដែលធ្វើចរាចរណ៍នៅខណៈពេល t ។ តារាងបានផ្តល់តម្លៃនៃអនុគមន៍ $C(t)$ នេះចាប់ពីឆ្នាំ 1980 ដល់ឆ្នាំ 2000 គិតត្រឹមថ្ងៃទី 30 ខែ កញ្ញា។ ចូរបកស្រាយ និង ប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $C'(1990)$ ។

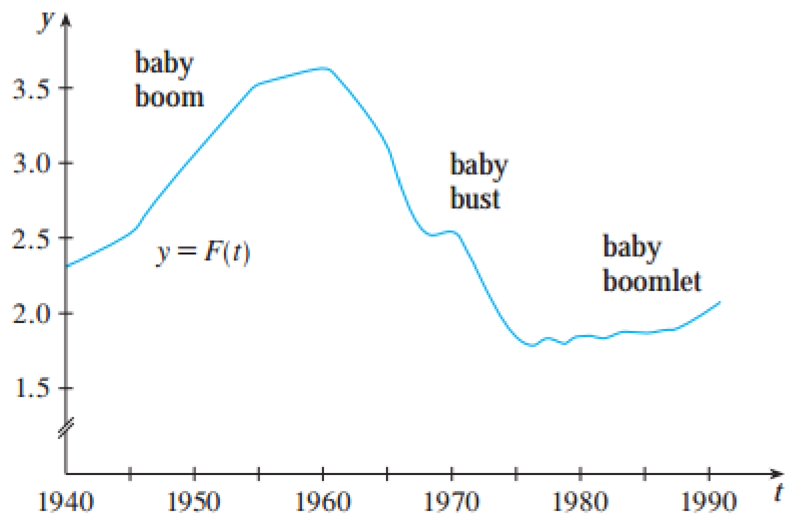
t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

25. អត្រានៃការមានកូនសរុបនៅខណៈពេល t ត្រូវបានបង្ហាញដោយ $F(t)$ គឺជាការប៉ាន់ស្មានចំនួនជាមធ្យមនៃកូនសម្រាប់ស្ត្រីម្នាក់ៗ (សន្មតថាអត្រាជាតិប្រមាណនៅពេលបច្ចុប្បន្នថេរ) ។ ក្រាហ្វនៃអត្រានៃការមានកូនសរុបនៅក្នុងសហរដ្ឋអាមេរិចការប្រែប្រួលពីឆ្នាំ 1940 ដល់ឆ្នាំ 1990 ។

ក). ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ $F'(1950)$ និង $F'(1987)$ ។

ខ). តើដេរីវេទាំងនេះមានន័យដូចម្តេច ?

គ). តើអ្នកអាចផ្តល់នូវហេតុផលសម្រាប់ដេរីវេទាំងនេះបានដែរឬទេ ?



26. ឧបមាថា $|f(x)| \le g(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ដែល $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ។ ចូររកលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ។

27. តាង $f(x) = [[x]] + [[-x]]$ ។

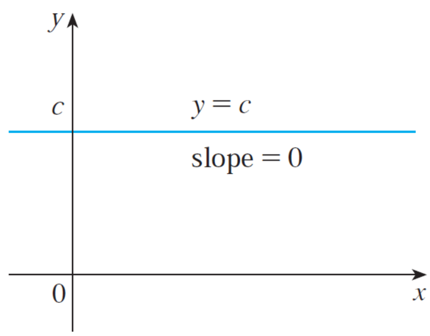
ក). តើតម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

ខ). តើអនុគមន៍ f មិនជាប់នៅត្រង់តម្លៃណា ?

មេរៀនទី៣ ច្បាប់ដេរីវេ

៣.១. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ពហុធា និងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

នៅក្នុងចំណុចដំបូងនេះយើងសិក្សាពីរបៀបនៃភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ថេរ អនុគមន៍ស្វ័យគុណ អនុគមន៍ពហុធា និងនុគមន៍
អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ចំពោះអនុគមន៍ថេរ $f(x)=c$ មានក្រាបជាបន្ទាត់ដេក $y=c$ ដែលមានមេគុណ 0 ។ ដូចនេះដេរីវេរបស់វាគឺ $f'(x)=0$ (ដូចនៅក្នុងរូបខាងក្រោម)។



ដេរីវេនៃអនុគមន៍ថេរនេះមានទម្រង់ងាយគឺ:

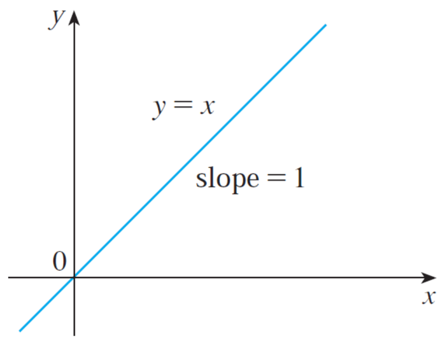
$$\boxed{f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{x\to 0}0=0}$$ ។

នៅក្នុងការកំណត់របស់លោក Leibniz ជាទស្សនវិទូជនជាតិអាឡឺម៉ង់គាត់បានសរសេរថា គ្រប់ដេរីវេនៃអនុគមន៍ថេរគឺ

មានទម្រង់ $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot(c)=0}$, ដែល c ជាចំនួនថេរ។

អនុគមន៍ស្វ័យគុណ

ចំណុចបន្ទាប់នេះយើងសិក្សាទៅលើអនុគមន៍ស្វ័យគុណ $f(x)=x^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន។ បើ
$n=1$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x$ គឺជាបន្ទាត់ $y=x$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស 1 (ក្រាបដូចរូបខាងក្រោម)។



ដេរីវេនៃសមីការបន្ទាត់ដែលបានមកពីអនុមន៍ស្វ័យគុណក្នុងករណី $n=1$ មានទម្រង់គឺ $\boxed{\frac{d}{dx}(x)=1}$,$\boxed{*}$ ។

សង្កេតមើលក្នុងករណី $n=2$ និង $n=3$ នៅចំណុច (2.8) ក្នុងលំហាត់ទី $(19 and\ 20)$ យើងឃើញថា

$\boxed{\frac{d}{dx}(x^2)=2x}$ និង $\boxed{\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2}$, $\boxed{**}$ ។

ចំពោះ $n=4$ យើងអាចរកដេរីវេនៃអនុគន៍ $f(x)=x^4$ តាមនិយមន័យដេរីវេដូចខាងក្រោម

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3\right)$$

$$=4x^3$$

យើងបាន $\boxed{\frac{d}{dx}(x^4)=4x^3}$, $\boxed{***}$ ។

យើងប្រៀបធៀបសមីការ $\boxed{*}$, $\boxed{**}$ និង $\boxed{***}$ វាគឺមានលំនាំដូចគ្នា។ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ

$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}}$ ពិត។

ការស្រាយបញ្ជាក់ទី១

យើងមាន $\boxed{x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)}$

យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់តាមរបៀបធម្មតាបានគឺដោយធ្វើការគុណជាមួយកត្តាដែលនៅខាងស្តាំតាមលំនាំកើន និងចុះនៃ
ស្វ័យគុណនៃស្វីតននិពន្ធរួចបូកកត្តាជាបន្តបន្ទាប់ដែលដូចជាស៊េរីធរណីមាត្រ។ ប្រសិនបើ $f(x)=x^n$ យើងអាចប្រើ
សមីការ $(2.7.5)$ សម្រាប់ $f'(a)$ ហើយនឹងសមីការដែលសរសេរដូចខាងក្រោម៖

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

$$=a^{n-1}+a^{n-2}a+\cdots+aa^{n-2}+a^{n-1}$$

$$=na^{n-1}$$

ការស្រាយបញ្ជាក់ទី២

យើងមាន $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}}$

ក្នុងការរកដេរីវេនៃ x^4 ដោយធ្វើការពន្លាត $(x+h)^4$ ដែលត្រូវការពន្លាត $(x+h)^n$ ហើយប្រើទ្រឹស្តីបទ

Binomial

ដើម្បីដោះស្រាយ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n\right]-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-1}+h^{n-1}\right]$$

$$=nx^{n-1}$$

ព្រោះ គ្រប់កត្តាលើកលែងតែតួដំបូងគឺមាន h ជាកត្តា ហើយ h ខិតជិតសូន្យ

អនុគមន៍ស្វ័យគុណដោយប្រើប្រាស់សញ្ញាណផ្សេងៗនៅក្នុងឧទាហរណ៍១:

ឧទាហរណ៍១

(a) if $f(x) = x^6$, then $f'(x) = 6x^5$ $\quad$ (b) if $y = x^{1000}$, then $y' = 1000x^{999}$

(c) if $y = t^4$, then $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$ $\quad$ (d) $\dfrac{d}{dt}\left(r^3\right) = 3r^2$

តើអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៃចំនួនគត់អវិជ្ជមានជាអ្វី? ក្នុងលំហាត់ទី 61 គឺបានសួរពីការប្រៀបធៀបនិយមន័យដេរីវេ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

ឬយើងអាចសរសេរសមីការនេះ: $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)x^{-2}$

ហើយអនុគមន៍ស្វ័យគុណពិតត្រង់ $n = -1$។ ពិតណាស់យើងនឹងបង្ហាញក្នុងចំណុចបន្ទាប់

$\left[\text{Exercise } 62(c)\right]$ ថា

វាផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ចំនួនគត់អវិជ្ជមាន។

តើនិទស្សន្តប្រភាគគឺជាអ្វី? ក្នុងឧទាហរណ៍ទី 3 ចំណុច 2.8 យើងបានរកឃើញថា $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ឬក៏យើងអាចសរសេរថា $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

អនុគមន៍ស្វ័យគុណបានបង្ហាញថាវាពិតបានកាលណា $n = \dfrac{1}{2}$ ។ ជាការពិតណាស់ពួកយើងនឹងបង្ហាញនៅចំណុច

3.6 ថាពិតគ្រប់ចំនួនពិត n ។

ច្បាប់ស្វ័យគុណ(ករណីទូទៅ)បើ n ជាចំនួនពិតនោះ: $\dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

ឧទាហរណ៍2 ភាពមានដេរីវេ

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

ដំណោះស្រាយ ក្នុងករណីនីមួយៗគេអាចសរសេរអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៃ x

(a) ព្រោះ $f(x)=x^{-2}$, គេប្រើច្បាប់ស្វ័យគុណត្រង់ $n=-2$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}x^{\left(\frac{2}{3}\right)-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

ក្នុងគោលការណ៍នៃច្បាប់ស្វ័យគុណ គឺដើម្បីរកបន្ទាត់ប៉ះដោយមិនយោងទៅតាមនិយមន័យនៃដេរីវេ។ គោល
ការណ៍នេះគេក៏ប្រើដើម្បីរកសមីការ normal line ដែរ។ The normal line គឺជាបន្ទាត់ដែលកាត់ខ្សែកោង ត្រង់ចំណុច P
មួយ ហើយវាក៏កាត់និងកែងទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច P ដូចគ្នា។ (ក្នុងការសិក្សានៃអុិបទិច, វាក៏ជា ចំណុចមួយដែលត្រូវការដើម្បីរកមុំរវាង ពន្លឺកាំរស្មី ray និង The notmal line ទៅកែវថត)។

ឧទាហរណ៍3 គេមានសមីការ normal line ទៅខ្សែកោងគឺ $y=x\sqrt{x}$ និងកាត់ត្រង់ចំណុច$(1,1)$។ រកសមីការបន្ទាត់
ប៉ះ រួចសង់ក្រាបនៃខ្សែកោងនិងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនេះ។

ដំណោះស្រាយ យើងមានអនុគមន៍ $f(x)=x\sqrt{x}=x.x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\left(\frac{3}{2}\right)-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

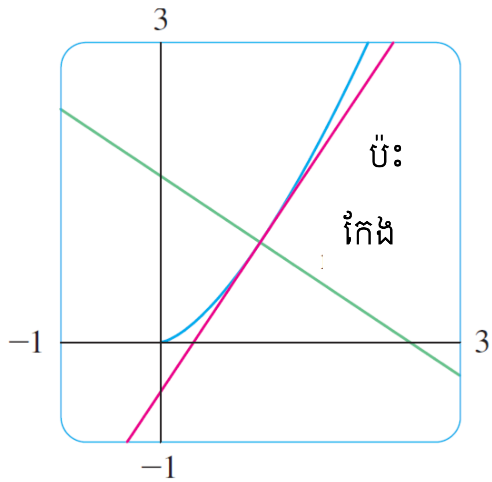
ដូចនេះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច$(1,1)$ នោះ $f'(1)=\frac{3}{2}$ ។

គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-1=\frac{3}{2}(x-1)$ or $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ ។

The normal line គឺកែងនិងកាត់បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង,នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ *normal line* គឺជា ចម្រាស
អវិជ្ជមាននៃមេគុណរបស់បន្ទាត់ប៉ះ $\frac{3}{2}$, គឺ$\left(-\frac{2}{3}\right)$ ។

យើងបានសមីការនៃ*normal line* គឺ$y-1=-\frac{2}{3}(x-1)$ or $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ ។

សង់ខ្សែកោង និងបន្ទាត់ប៉ះដូចក្នុងរូបទី 4



អនុគមន៍ថ្មីដែលមានទម្រង់បានពីអនុគមន៍ដើមដោយប្រើប្រមាណវិធី បូក ដក ឬគុណដោយចំនួនថេរ នោះ

អនុគមន៍ថ្មីនេះអាចគណនាតាមលក្ខខណ្ឌនៃដេរីវេនៃអនុគមន៍ដើម។ ទ្រឹស្តីបទមួយបានលើកឡើងថាដេរីវេនៃ

ចំនួនថេរនិងអនុគមន៍គឺស្មើនឹងចំនួនថេរនិងដេរីវេនៃអនុគមន៍នោះ។

ច្បាប់នៃមេគុណជាចំនួនថេរ ប្រសិនបើ ជាចំនួនថេរ និង f ជាអនុគមន៍ដេរីវេ នោះយើងបាន:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=c\frac{d}{dx}f(x)}$$

សម្រាយបញ្ជាក់:

តាង $g(x)=cf(x)$ នោះ

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=\lim_{h\to 0}c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$$

ឧទាហរណ៍:

$$(a)\ \frac{d}{dx}\left(3x^4\right)=3\frac{d}{dx}\left(x^4\right)=3\left(4x^3\right)=12x^3$$

$$(b)\ \frac{d}{dx}(-x)=\frac{d}{dx}\left[(-1)x\right]=(-1)\frac{d}{dx}(x)=-1(1)=-1$$

ចំណុចបន្ទាប់ប្រាប់យើងឲ្យដឹងពីដេរីវេនៃផលបូកនៃអនុគមន៍គឺជាផលបូកនៃដេរីវេ

ច្បាប់ផលបូក ប្រសិនបើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $F(x)=f(x)+g(x)$

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

ផលបូកនេះបានពីការបំបែកផលបូកនៃតាមចំនួននៃអនុគមន៍ដើម។ ជាឧទាហរណ៍ការប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទ

ទាំងពីរ នោះយើងបាន: $\boxed{(f+g+h)'=\left[(f+g)+h\right]'=(f+g)'+h'=f'+g'+h'}$

ដោយ $f-g=f+(-1)g$ នោះតាមច្បាប់នៃផលបូក និងច្បាប់មេគុណជាចំនួនថេរ នោះយើងបាន:

The difference rule ប្រសិនបើ f និង g គឺជាអនុគមន៍ដេរីវេ នោះ

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)}$$

អនុគមន៍ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ អនុគមន៍ផលបូក និងអនុគមន៍ផ្សេងៗទៀតនៅពេលនៅជាមួយអនុគមន៍ស្វ័យគុណក្នុងការគណនាដេរីវេរបស់វាយើងត្រូវបំបែកទៅជាដេរីវេពហុធា។ ឧទាហរណ៍ខាងក្រោម:

ឧទាហរណ៍ ៥

$$\frac{d}{dx}\left(x^8+12x^5-4x^4+10x^3-6x+5\right)=\frac{d}{dx}\left(x^8\right)+12\frac{d}{dx}\left(x^5\right)-4\frac{d}{dx}\left(x^4\right)+10\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-6\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(5)$$

$$=8x^7+12\left(5x^4\right)-4\left(4x^3\right)+10\left(3x^2\right)-6(1)+0$$

$$=8x^7+60x^4-16x^3+30x^2-6$$

ឧទាហរណ៍ទី៦ រកសំណុំចំណុចនៃខ្សែកោង $y=x^4-6x^2+4$ ដែលមានសមីការបន្ទាត់ប៉ះដេក

ដំណោះស្រាយ

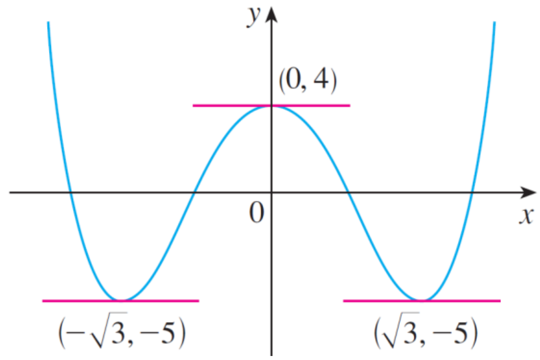
បន្ទាត់ប៉ះដេកកើតឡើងនៅពេលដែលដេរីវេរបស់វាស្មើសូន្យ។

យើងមាន: $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^4\right)-6\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(4)$

$$=4x^3-12x+0=4x\left(x^2-3\right)$$

បើ $\frac{dy}{dx}=0$ នោះ $x=0$ ឬ $x^2-3=0$ នាំឲ្យ $x=\pm\sqrt{3}$

ដូចនេះ ក្រាបមានបន្ទាត់ដេកប៉ះត្រង់ $x=0$, $x=\sqrt{3}$ និង $x=-\sqrt{3}$ និងមានចំនុចប្រសព្វគឺ $(0,4)$,$\left(\sqrt{3},-5\right)$, $\left(-\sqrt{3},-5\right)$។ មើលរូបទី៥



ឧទាហរណ៍ ៧ ៖ គេឲ្យសមីការចលនានៃភាគល្អិតដោយ $s=2t^3-5t^2+3t+4$ ដែល s គិតជា cm និង t គិតជាវិនាទី (s) ។ រកសំទុះជាអនុគនម៍នៃពេល

ដំណោះស្រាយ

យើងមានៈ ល្បឿន $v(t)=\frac{ds}{dt}=6t^2-10t+3$

សំទុះ $a(t)=\frac{dv}{dt}=12t-10$

យើងបាន សំទុះខណៈពេល $2s$ គឺ $a(2)=14cm/s^2$ ។

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

Let's try to គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=a^x$ ដោយការប្រើប្រាស់និយមន័យដេរីវេ:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x-h}-a^x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^xa^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}$$

ដោយកត្តា a^x មិនអាស្រ័យនឹង h នោះយើងអាចយកវាដាក់ខាងមុខលីមីតបាន

$$f'(x)=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

ចំណាំ លីមីតគឺជាតម្លៃនៃដេរីវេត្រង់ $f'(x)=0$ នោះ $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=f'(0)$

យើងបានបង្ហាញថាប្រសិនបើអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=a^x$ មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ នោះវាមានដេរីវេគ្រប់ចំណុចគឺ $f'(x)=f'(0)a^x$ តាងដោយសមីការ (4) ។

សមីការនេះមានន័យថាអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណែស្យែលគឺជាសមាមាត្រទៅនឹងអនុគមន៍របស់វា។ (មេគុណប្រាប់ទិសគឺសមាមាត្រទៅនឹងកម្ពស់)។

តារាងតម្លៃលេខសម្រាប់អត្ថិភាពនៃ $f'(0)$ ដែលឲ្យដូចក្នុងតារាងខាងក្រោមក្នុងករណី $a=2$ និង $a=3$។ (តម្លៃគឺបានបញ្ជាក់យ៉ាងត្រឹមត្រូវចាប់ពីទសភាគបួនខ្ទង់នោះវានឹងមានលីមីត)។

h	$\dfrac{2^h-1}{h}$	$\dfrac{3^h-1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

បើ $a=2$ នោះ $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2^h-1}{h}\approx 0.69$

បើ $a=3$ នោះ $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3^h-1}{h}\approx 1.10$

ជាការពិតណាស់វាអាចកំណត់ថាមានលីមីតបានដោយត្រឹមត្រូវចាប់ពីទសភាគ៦ខ្ទង់ឡើងទៅតាមតម្លៃខាងក្រោម៖

$$\frac{d}{dx}\left(2^x\right)\Big|_{x=0}\approx 0.693147$$

តាមសមីការ (4) យើងមាន $f'(x)=f'(0)a^x$

យើងបាន $\dfrac{d}{dx}\left(2^x\right)\approx(\sim 0.69)2^x$ និង $\dfrac{d}{dx}\left(3^x\right)\approx(1.10)3^x$ តាងសមីការ (5)

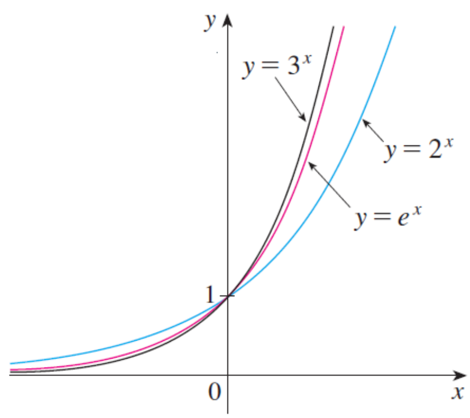
គ្រប់ជម្រើសសម្រាប់តម្លៃ a ក្នុងសមីការ (4),គឺរូបមន្តដេរីវេត្រង់ $f'(0)=1$។

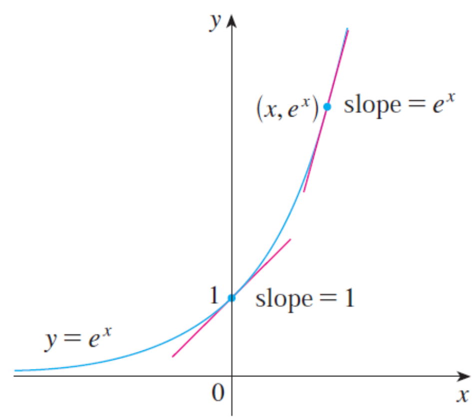
មើលទៅលើការប៉ាន់ស្មាននៃ $f'(0)$ ក្នុងករណី $a=2$ និង $a=3$ យើងឃើញថាវាសមហេតុផលឬត្រឹមត្រូវបើ a ស្ថិតនៅនៅចម្លោះ 2 និង3 នោះ $f'(0)=1$ ។ ក្នុលក្ខខណ្ឌនេះយើងត្រូវបញ្ជាក់តម្លៃនេះដោយ e ។(ជាការពិតណាស់នេះជារបៀបដែលយើង បានប្រើប្រាស់ក្នុងចំណុចទី1.5)។ យើងទាញបាននិយមន័យដូចខាងក្រោម ៖

និយមន័យនៃតម្លៃ e

e គឺជាតម្លៃលេខនោះយើងបាន $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

ក្នុងនិយមន័យខាងលើគឺមានន័យថាគ្រប់អនុគមន៍អិចស្ប៉ូ $y=a^x$, អនុគមន៍ $f(x)=e^x$ មានបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំណុចតែមួយ $(0,1)$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(0)$ គឺស្មើ1 ដូចគ្នា។ មើលរូបទី៦ និងទី៧៖





ប្រសិនបើយើងឲ្យ $a=e$ ដូចនេះ $f'(0)=1$ តាមសមីការ (4) ហើយករណីទាំងនេះបានក្លាយជារូបមន្តដេរីវេមួយ
សំខាន់ផងដែរ។

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូ $f(x)=e^x$ គឺមានលក្ខណៈពិសេសត្រង់ថាវាអាចរក្សាអនុគមន៍របស់បានដដែលទោះដេរីវេក៏
ដោយ។ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង $y=e^x$ គឺស្មើនឹងកូអរដោនេ y (ក្នុងរូបទី៧)។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គេឲ្យ $f(x)=e^x-x$។ រក f' និង f'' រួចធ្វើការប្រៀបធៀបក្រាបនៃ f និង f'។

ដំណោះស្រាយ $f(x)=e^x-x$

តាមនិយមន័យដេរីវេយើងបាន $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(e^x-x\right)=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)-\frac{d}{dx}(x)=e^x-1$

ក្នុងចំណុច 2.8 យើងបានំណត់ដេរីវេទី២គឺជាដេរីវេ ១នៃ f' ។

យើងបាន $f''(x)=\frac{d}{dx}\left(e^x-1\right)=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)-\frac{d}{dx}(1)=e^x$

អនុគមន៍ f និងដេរីវេរបស់វា f' គឺមានក្រាបក្នុងរូបទី៨។ ចំណាំ f មានបន្ទាត់ជាបន្ទាត់ដេកកាលណា $x=0$ និងកាត់ត្រង់ $f'(0)=0$ ។ ចំណាំ $\forall x>0$ នោះ $f'(x)$មានតម្លៃវិជ្ជមាន ហើយក្រាបនៃអនុគមន៍ f កើន ។ ផ្ទុយមកវិញ $\forall x<0$ នោះ $f'(x)$ មានតម្លៃអវិជ្ជមាន ហើយក្រាបនៃអននុគមន៍ f ចុះ។

ឧទាហរណ៍ទី៩

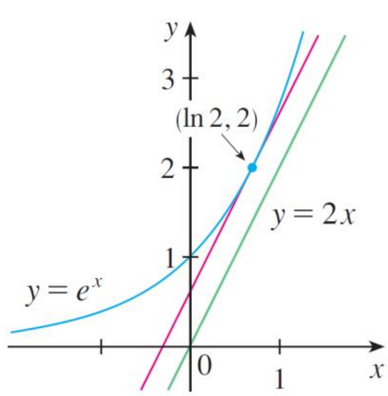
រកចំណុចប៉ះនៅលើខ្សែកោង $y=e^x$ ជាមួយបន្ទាត់មួយ ដែលបន្ទាត់នោះស្របនឹងបន្ទាត់មួយទៀតដែលមានដែលមានសមីការ $y=2x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $y=e^x$ នោះ $y'=\left(e^x\right)'=e^x$

ប្តូរ xទៅជា a នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺត្រង់ចំណុច e^a

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y=2x$ នោះតាមករណីបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាកាលណា មេគុណនៃបន្ទាត់ទាំងពីរស្មើគ្នា។ យើងបាន $e^a=2\Rightarrow a=\ln 2$



ដូចនេះ ចំណុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ជាមួយខ្សែកោងគឺ $\left(a,e^{a}\right)=\left(\ln 2,2\right)$ ។

៣.៦ លំហាត់

១. (a) តើយើងបានកំណត់តម្លៃ e បានយ៉ាងដូចម្តេច?

(b) ប្រើ Calculator ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីត $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2.7^{h}-1}{h}$ និង $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2.8^{h}-1}{h}$

យើងឃើញថាតម្លៃដែលត្រឹមត្រូវគឺនៅខាងក្រោយក្បៀសពីរខ្ទង់។ តើយើងអាចសន្និដ្ឋានបានយ៉ាងដូចម្តេច

ចំពោះតម្លៃ e ?

២. (a) គូសព្រាងនៃក្រាបនៃ $f\left(x\right)=e^{x}$ ហើយសូមយកចិត្តទុកដាក់នៅពេលដែលក្រាបកាត់អ័ក្ស y ។

តើការពិតនៃក្រាបគឺពិតជាកាត់ត្រង់ចំណុចដូចដែលអ្នកគិតដែរឬទេ?

(b) តើផ្នែកអ្វីនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)=e^{x}$ និង $g\left(x\right)=x^{e}$? ប្រៀបធៀបទ្រឹស្តីនៃភាពមានដេរីវេរបស់អនុ
គមន៍ f និង g ។

(c) អនុគមន៍ក្នុងចំណុច (b) នៃអនុគមន៍ទាំងពីរ តើអនុគមន៍មួយណាមានតម្លៃធំជាង នៅពេលដែល x កាន់តែធំ។

៣. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍

3. $f\left(x\right)=2^{40}$

4. $f\left(x\right)=e^{5}$

5. $f\left(t\right)=2-\dfrac{2}{3}t$

6. $F\left(x\right)=\dfrac{3}{4}x^{8}$

7. $f\left(x\right)=x^{3}-4x+6$

8. $f\left(t\right)=1.4t^{5}-2.5t^{2}+6.7$

9. $g(x) = x^2(1-2x)$

10. $h(x) = (x-2)(2x+3)$

11. $g(t) = 2t^{-\frac{3}{4}}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

14. $y = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$

15. $R(a) = (3a+1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt{x}(x-1)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $S(R) = 4\pi R^2$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $g(u) = \sqrt{2}u + \sqrt{3}u$

25. $j(x) = x^{2.4} + e^{2.4}$

26. $k(r) = e^r + r^e$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $\sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

$33-34$ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងដែលឲ្យចំណុចដូចខាងក្រោម៖

33. $y=\sqrt[4]{x}$, $(1,1)$

34. $y=x^4+2x^2-x$, $(1,2)$

$35-36$ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ធម្មតាទៅនឹងទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុចដូចខាងក្រោម៖

35. $y=x^4+2e^x$, $(0,2)$

36. $y=x^2-x^4$, $(1,0)$

$37-38$ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុចដែលគេឲ្យដូចខាងក្រោម។ រួចសង់ក្រាប និង បន្ទាត់ប៉ះក្នុងប្លង់តែមួយ

37. $y=3x^2-x^3$, $(1,2)$

38. $y=x-\sqrt{x}$, $(1,0)$

$39-40$ រក $f'(x)$ រួចប្រៀបធៀបក្រាបនៃ f និង f' ហើយប្រើវាដើម្បីពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជាអ្នកគិតថាវាពិតជាសមហេតុផល។

39. $f(x)=x^4-2x^3+x^2$

40. $f(x)=x^5-2x^3+x-1$

41. (a) ប្រើ Calculator ឬ Computor ដើម្បីសង់ក្រាបនៃ $f(x)=x^4-3x^3-6x^2+7x+30$ in the viewing rectangle [-3,5] by [-10,50].

(b) ដោយប្រើក្រាបក្នុងចំនុច(a) ដើម្បីប៉ានស្មានមេគុណប្រាប់ទិស , ធ្វើគំនូសព្រាងដោយដៃ នៃក្រាប f' ។ (មើលឧទាហរណ៍ទី១ ក្នុងចំណុចទី2.8)

(c) គណនា $f'(x)$ ហើយប្រើកន្សោមនេះ with a graph device , to graph f'។ ប្រៀបធៀបជាមួយការគូសព្រាងរបស់អ្នកក្នុងចំណុច(b)។

42. (a) ប្រើ Calculator ឬ Computer ដើម្បីសង់ក្រាប $g(x)=e^x-3x^2$ in the viewing rectangle

[-1, 4] by [-8, 8] .

(b) ប្រើក្រាបក្នុងចំនុច (a) ដើម្បីប៉ានស្មានមេគុណប្រាប់ទិស រួចធ្វើគំនូសព្រាងដោយដៃ នៃក្រាប g'។ (មើលឧយាហរណ៍ទី១ ក្នុងចំណុច2.8)។

(c) គណនា $g'(x)$ ហើយកន្សោមនេះ with the graph device , to graph g'។ ប្រៀបធៀបជាមួយការគូសព្រាងរបស់អ្នកក្នុងចំណុច (b)។

$43-44$ រកដេរីវេទី១ និងទី ២នៃអនុគមន៍

43. $f(x)=10x^{10}+5x^5-x$

44. $G(r)=\sqrt{r}+\sqrt[3]{r}$

$45-46$ រកដេរីវេទី១ និងទី២នៃអនុគមន៍។ ត្រួតពិនិត្យមើលថាចម្លើយរបស់អ្នកគឺសមហេតុផលដោយធ្វើការប្រៀបធៀបក្រាប f , f' និង f'' ។

47. គេឲ្យសមីការចលនានៃភាគល្អិតគឺ $s=t^3-3t$ ដែល s គិតជា m និង t គិតជាវិនាទី។ រក

(a) វ៉ិចទ័រល្បឿននិងសំទុះជាអនុគមន៍នៃ t

(b) សំទុះក្រោយរយៈពេល $2s$

(c) សំទុះនៅពេលវ៉ិចទ័រល្បឿនស្មើសូន្យ

48. គេឲ្យសមីការចលនានៃភាគល្អិតគឺ $s=t^4-2t^3+t^2-t$ ដែល s គិតជា m និង t គិតជាវិនាទី។

(a) រកវ៉ិចទ័រល្បឿននិងសំទុះជាអនុគមន៍នៃ t

(b) រកសំទុះក្រោយរយៈពេល $1s$

(c) សង់ក្រាបរបស់វ៉ិចទ័រល្បឿន និងសំទុះក្នុងប្លង់តែមួយ

49. តាមច្បាប់របស់លោក Boyle បើកាលណាឧស្ម័នរងនូវសម្ពាធថេរ នោះសម្ពាធ P នៃឧស្ម័នវាច្រាសសមាមាត្រទៅនឹង មាឌនៃឧស្ម័ន។

(a) ឧបមាថាសម្ពាធនៃឧស្ម័នមួយនៅពេលដែលមានមាឌ $0.106m^3$ និងសីតុណ្ហភាព វាមានសម្ពាធ $50kpa$ ។ រកមាឌជាអនុគមន៍នៃ P ។

(b) គណនា $\frac{dV}{dP}$ ដែលគេឲ្យ $P = 50kPa$ ។ តើអ្វីទៅជាអត្ថន័យនៃដេរីវេនិងខ្នឹមសារមេរៀន ?

50. សំបកកង់ឡានគឺត្រូវការចាំបាច់បំប៉ោងជានិច្ច ពីព្រោះការប្រើប្រាស់គឺមានការកំណត់ច្បាស់លាស់។ ទិន្នន័យនៅក្នុងតារាងបង្ហាញពីរយៈពេលនៃការប្រើប្រាស់នៃ L (ក្នុង១០០០miles) ហើយសម្ពាធគិតជា ($\frac{1b}{in^2}$)។

P	26	28	31	35	38	42	45
I	50	66	78	81	74	70	59

(a) ប្រើឧបករណ៍គណនាក្រាហ្វិច ឬកុំព្យូទ័រដើម្បី បង្កើតជាម៉ូដែលបង្កើតអនុគមន៍ដឺក្រេទី២។

(b) ប្រើគំរូដើម្បីប៉ាន់ស្មាន $\frac{dL}{dP}$ ដែល $P = 30$ និង $P = 40$ ។ តើអ្វីជាអត្ថន័យនៃដេរីវេ ? តើអ្វីគឺជាខ្លឹមសារមេរៀន ? តើអ្វីជាសារៈសំខាន់នៃសញ្ញាដេរី ?

51. រកចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ តើបន្ទាប់ផ្តេកប៉ះត្រង់ត្រង់ណា ?

52. គ្រប់ចំនួនពិតនៃ x តើក្រាបនៃ $f(x) = e^x - 2x$ មានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកដែរឬទេ ?

53. បង្ហាញថាខ្សែកោង $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ មានបន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសផ្ទុយពី 2 ។

54. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង $y = x\sqrt{x}$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y = 1 + 3x$ ។

55. រកសមីការនៃបន្ទាត់ទាំងពីរដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $y=1+x^3$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $12x-y=1$។

56. រកចំណុចដែលនៅលើខ្សែកោង $y=1+2e^x-3x$ គឺជាបន្ទាត់ប៉ះ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $3x-y=5$ ។ គូសក្រាបនៃខ្សែកោង និងបន្ទាត់ទាំងពីរ។

57. រកសមីការបន្ទាត់ទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2-5x+4$ ហើយប៉ារ៉ាបូលនេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $x-3y=5$ ។

58. រកទីតាំងនៃបន្ទាត់ទៅប៉ារ៉ាបូល $y=x-x^2$ ត្រង់ចំណុច $(1,0)$[...] ប្រសព្វជាមួយប៉ារ៉ាបូលជាលើកទី២ ? រួចគូសរូបបញ្ជាក់។

59. គូសដ្យាក្រាមដើម្បីបង្ហាញថាមានបន្ទាត់ប៉ះពីរទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ដែលឆ្លងកាត់ចំណុច $(0,-4)$។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចដែលមានបន្ទាត់ប៉ះប្រសព្វទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល។

60. (a)រកសមីការនៃបន្ទាត់ទាំងពីរកាត់ចំណុច$(-2,3)$ ដែលប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2+x$ ។

(b) បង្ហាញថាគ្មានបន្ទាត់ណាដែលកាត់ចំណុច$(2,7)$ហើយប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលទេ។ រួចគូសដ្យាមដើម្បីបង្ហាញ។

61. ប្រើនិយមន័យនៃដេរីវេដើម្បីបង្ហាញថា ប្រសិនបើ $f(x)=\frac{1}{x}$ នោះ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ។ (ការបង្ហាញនេះគឺប្រើច្បាប់ស្វ័យគុណក្នុងករណី $n=-1$)។

62. រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ដោយធ្វើការគណនាដេរីវេពីរបីតួដំបូង រួចសង្កេតមើលលំនាំគំរូរបស់វា

(a) $f(x)=x^n$ (b) $f(x)=\frac{1}{x}$

63. រកពហុធាដឺក្រេទី២ P ដែលគេឲ្យ $P(2)=5$, $P'(2)=3$ និង $P''(2)=2$ ។

64. សមីការ $y''+y'-2y=x^2$ គេហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ពីព្រោះវាមានអនុគមន៍ y ដែលគេមិនស្គាល់

ហើយមានដេរីវេ y' និង y'' ។ រកមេគុណ A,B និង C របស់អនុគមន៍ $y=Ax^2+Bx+C$ ។ (សមីការឌីផេ

រ៉ង់ស្យែលនេះនឹងសិក្សាលម្អិតនៅជំពូកទ៩)។

65. រកអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣ $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ដែលក្រាបមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកត្រង់ចំណុច $(-2,6)$ និង $(2,0)$ ។

66. រកសមីការប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2-bx+c$ មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 4 ត្រង់ $x=1$ និងមេគុណប្រាប់ទិស -8 ត្រង់ $x=-1$ ហើយកាត់ចំណុច $(2,15)$

67. តាង $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & if \quad x<1 \\ x+1 & if \quad x\geq 1 \end{cases}$

តើ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ 1 ដែរឬទេ? គូសរូបនៃ f និង f' ។

68. តើចំនួនអីដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមមានដេរីវេ?

$$g(x)=\begin{cases} 2x & if \quad x\leq 0 \\ 2x-x^2 & if \quad 0<x<2 \\ 2-x & if \quad x\geq 2 \end{cases}$$

ចូរឲ្យទម្រង់ទូទៅមួយនៃ g' រួចគូសក្រាបនៃ g និង g' ។

69.(a) តើតម្លៃ x ណាដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left|x^2-9\right|$ មានដេរីវេ? រកទម្រង់ទូទៅនៃ f'

(b) សង់ក្រាប f និង f'

70. តើអនុគមន៍ណាដែលធ្វើឲ្យ $h(x)=|x-1|+|x+2|$ មានដេរីវេ ? ចូរឲ្យទម្រង់ទូទៅនៃ h' រួចគូសក្រាប

h និង h' ។

71. រកសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលគេឲ្យសមីការ $y=ax^2+bx$ ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $(1,1)$ មានសមីការ

$y=3x-2$ ។

72. គេមានខ្សែកោង $y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ មានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x=0$ ឲ្យដោយសមីការ $y=2x+1$ និង ត្រង់ $x=1$ ឲ្យដោយសមីការ $y=2-3x$ ។ រកតម្លៃ a,b,c និង d ។

73. តើតម្លៃ a និង b ស្មើប៉ុន្មានទើបធ្វើឲ្យបន្ទាត់ $2x+y=b$ ប៉ះប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ ត្រង់ $x=2$?

74. រកតម្លៃ c ដែលធ្វើឲ្យបន្ទាត់ $y=\dfrac{3}{2}x+6$ ប៉ះខ្សែកោង $y=c\sqrt{x}$ ។

75. តាង $f(x)=\begin{cases} x^2 & if \quad x\le 2 \\ mx+b & if \quad x>2 \end{cases}$ រកតម្លៃ m និង b ដែលធ្វើឲ្យ f មានដេរីវេគ្រប់ចំណុច។

76. បន្ទាត់ប៉ះមួយប៉ះទៅប៉ារ៉ាបូល $xy=c$ ត្រង់ចំណុច P ។

(a) បង្ហាញថាចំណុចកណ្តាលនៃផ្នែកបន្ទាត់កាត់ចេញពីបន្ទាត់ប៉ះនេះដោយមានកូអរដោនេគឺ P។

(b) បង្ហាញថាត្រីកោណដែលបង្កើតឡើងដោយបន្ទាត់ប៉ះ និងអ័ក្សកូអរដោនេតែងតែមានផ្ទៃដូចគ្នា មិនថា P ស្ថិតនៅកន្លែងណានៅលើអ៊ីពែបូលនោះទេ។.

77. គណនា $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1000}-1}{x-1}$

78. គូសដ្យាក្រាមបង្ហាញបន្ទាប់ពីរកែងគ្នា ដែលប្រសព្វនឹងអ័ក្ស y និង ទាំងពីរប៉ះទៅប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ។ តើបន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចណា ?

79. បើ $c>\frac{1}{2}$ តើមានបន្ទាត់ប៉ុន្មានដែលកាត់ចំណុច $(0,c)$ are normal lines to the parabola $y=x^2$? What if $c\le\frac{1}{2}$?

80. សង់ប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ និង $y=x^2-2x+2$ តើអ្នកគិតថាមានបន្ទាត់មួយប៉ះខ្សែកោងទាំងពីរដែរឬទេ?

៣.២. ច្បាប់នៃផលគុណនិងផលចែក

ក្នុងចំណុចនេះយើងសិក្សាពីរបៀបរកដេរីវេនៃអនុគមន៍ថ្មីពីអនុគមន៍ដើម ដោយប្រើវិធីគុណ ឬវិធីចែក។

ច្បាប់នៃផលគុណ

វាស្រដៀងនឹងច្បាប់ផលបូកដែរ និង Difference Rules, one might be tempted to guess, ដូចលោក Leibniz បាន

បានធ្វើកាលពីពាសតវត្សរ៍មុន , that the derivative of a product is the product of the derivatives. យើងនឹងអាចដឹង

ថាវាមិនត្រឹមត្រូវ បើយើងមើលទៅលើវិធីគុណដេរីវេដូចឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ និង $g(x)=x^2\Rightarrow g'(x)=2x$

នោះ $f'(x)\cdot g'(x)=1\cdot 2x=2x$ តែ $\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=\left[x\cdot x^2\right]'=\left(x^3\right)'=3x^2$

យើងបាន $f'g'\neq(fg)'$។

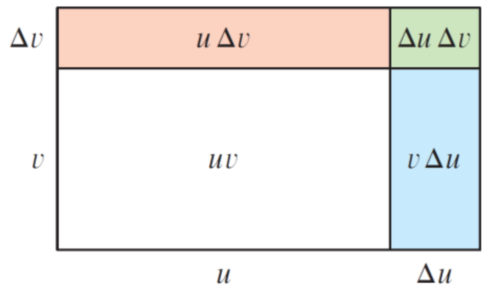
ទម្រង់ត្រឹមត្រូវគឺបានរកឃើញដោយលោក Leibniz ហើយវាត្រូវបានគេហៅថាច្បាប់ផលគុណ។

មុនពេលចាប់ផ្ដើមសិក្សាច្បាប់ផលគុណនេះ យើងមើលទៅលើ

ការរកឃើញច្បាប់នេះជាមុនសិន។ យើងសន្មត $u=f(x)$ និង

$v=g(x)$ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ។ បន្ទាប់មកយើងស្រាយផល

គុណ uv តាមផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែង(FIGURE 1) ។



បើ x មានបម្រែបម្រួល Δx ហើយត្រូវគ្នានឹង

បម្រែបម្រួល u និង v នោះ $\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta v = g(x+\Delta x) - g(x)$

តម្លៃថ្មីនៃផលគុណ $(u+\Delta u)(v+\Delta v)$ អាចស្រាយរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងធំ (FIGURE 1) ។ បម្រែ

បម្រួលផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណគឺ

$$\Delta uv = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v \quad , \quad (1)$$

= ផ្ទៃក្រឡាដែលមានពណ៌

បើយើងចែកអង្គទាំងពីរដោយ Δx នោះយើងបាន $\dfrac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

បើ $\Delta x \to 0$ យើងបានដេរីវេនៃ uv

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad , \quad (2)$$

(ចំណាំ $\Delta u \to 0$ និង $\Delta x \to 0$ ព្រោះ f គឺមានដេរីវេ ដូចនេះវាជាអនុគមន៍ជាប់)។ ទោះបីជាយើងបាន

ចាប់ផ្តើមដោយធ្វើការសន្មត (សម្រាប់ការបកស្រាយបែបធរណីមាត្រ) ដែលគ្រប់ផ្ទៃគឺវិជ្ជមាន និងសមីការ (1) គឺ

ពិត។ (ពិជគណិតដែលយើងតាងជាផ្ទៃក្រឡានៃរូបធរណីមាត្រខាងលើដែលមាន $u, v, \Delta u$ និង Δv គឺវិជ្ជមាន ឬ

អវិជ្ជមាន)។ ដូចដែលយើងបានបង្ហាញក្នុងសមីការ (2) ហើយយើងក៏បានដឹងថាច្បាប់នៃផលគុណគឺប្រើសម្រាប់

គ្រប់នៃអនុគមន៍ដេរីវេ u និង v ជាដើម។

ច្បាប់នៃផលគុណ បើ f និង g គឺជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ នោះ

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

ច្បាប់នៃផលគុណ បាននិយាយថា ដេរីវេនៃផលគុណនៃអនុគមន៍ពីរគឺជា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ទី១គុណឲ្យអនុគមន៍ទី២

បូកជាមួយ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ទី២គុណជាមួយអនុគនម៍ទី១។

ឧទាហរណ៍ទី១

(a) បើ $f(x) = xe^{x}$ ។ រក $f'(x)$

(b) រកដេរីវេទី n , $f^{n}(x)$

ដំណោះស្រាយ

(a) តាមច្បាប់នៃផលគុណយើងបានៈ $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(xe^{x}\right)$

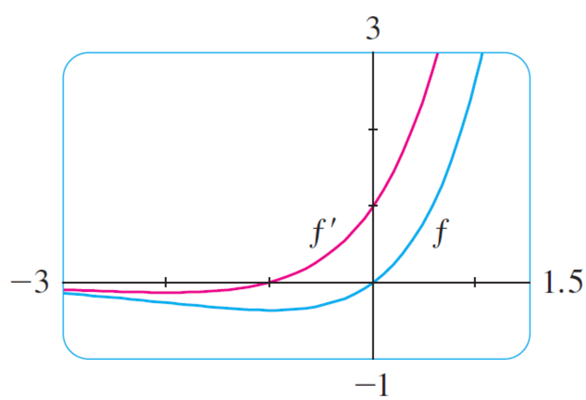
$$=x\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)+e^{x}\frac{d}{dx}(x)$$
$$=xe^{x}+e^{x}\cdot 1=(x+1)e^{x}$$

(b) ប្រើច្បាប់នៃផលគុណបន្តបន្ទាប់យើងបាន $f''(x)=\frac{d}{dx}\left[(x+1)e^{x}\right]$

$$=(x+1)\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)+e^{x}\frac{d}{dx}(x+1)$$
$$=(x+1)e^{x}+e^{x}\cdot 1=(x+2)e^{x}$$

បន្ថែមទៅលើច្បាប់ផលគុណ $f'''(x)=(x+3)e^{x}$ $\quad f^{(4)}(x)=(x+4)e^{x}$

ជាការពិតណាស់ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ និងបន្ថែមតួ e^{x} ដូចនេះ $f^{(n)}(x)=(x+n)e^{x}$



ឧទាហរណ៍ទី២ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(t)=\sqrt{t}(a+bt)$

ដំណោះស្រាយទ១ ប្រើច្បាប់នៃផលគុណ យើងបាន

$$f'(t)=\sqrt{t}\frac{d}{dt}(a+bt)+(a+bt)\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$=\sqrt{t}\cdot b+(a+bt)\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$=b\sqrt{t}+\frac{a+bt}{2\sqrt{t}}=\frac{a+3bt}{2\sqrt{t}}$$

ដំណោះស្រាយទី២ បើយើងប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូ នោះយើងអាចគណនាដោយមិនប្រើច្បាប់នៃផលគុណ

$$f(t)=a\sqrt{t}+bt\sqrt{t}=at^{\frac{1}{2}}+bt^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}bt^{\frac{1}{2}}$$

ក្នុងឧទាហរណ៍ទី ២ គឺបានបង្ហាញពីភាពងាយស្រួលឬសាមញ្ញសម្រាប់គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ផលគុណជាងប្រើ

ច្បាប់នៃផលគុណ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ បើ $f(x)=\sqrt{x}g(x)$ ដែល $g(4)=2$ ហើយ $g'(4)=3$ ។ រក $f'(4)$

ដំណោះស្រាយ តាមច្បាប់នៃផលគុណយើងបាន

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}g(x)\right]=\sqrt{x}\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]+g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$=\sqrt{x}g'(x)+g(x)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{x}g'(x)+\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

ដូចនេះ $f'(4)=\sqrt{4}g'(4)+\frac{g(4)}{2\sqrt{4}}=2\cdot3+\frac{2}{2\cdot2}=6.5$

ច្បាប់នៃផលចែក

យើងរកក្បួនសម្រាប់គណនាដេរីវេនៃផលចែកអនុគមន៍ពីរ $u=f(x)$ និង $v=g(x)$ មានវិធីសាស្ត្រជាច្រើន

ដែលដូចថាការរកច្បាប់នៃផលគុណ។ បើ x,u និង v ជំនួសដោយ $\Delta x,\Delta u$ និង Δv នោះយើងបាន

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$
$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

ដូចនេះ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-\frac{u\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$

ដោយ $\Delta x\to0,\Delta v\to0$ ព្រោះ $v=g(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដេរីវេ និងអនុគមន៍ជាប់។ តាមក្បួននៃលីមីតយើងបាន

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to0}}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ច្បាប់ផលចែក បើ f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ នោះ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]-f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

ច្បាប់នៃផលចែកបានលើកឡើងថាដេរីវេនៃផលចែក គឺជាការគុណភាគបែងជាមួយដេរីវេនៃភាគយកដក ជាមួយភាគ

យកគុណជាមួយដេរីវេនៃភាគបែង ហើយចែកការេនៃភាគបែង។

ច្បាប់នៃផលចែកនិងទម្រង់នៃដេរីវេផ្សេងទៀតអាចឲ្យយើងគណនាដេរីវេនៃ rational function ដូចក្នុង ឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ទី៤

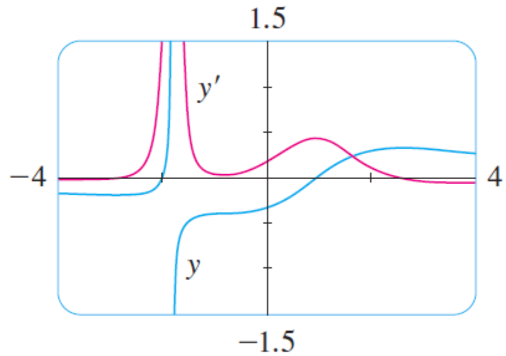
តាង $y=\frac{x^2+x-2}{x^3+6}$

នោះ $y'=\frac{\left(x^3+6\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+x-2\right)-\left(x^2+x-2\right)\frac{d}{dx}\left(x^3+6\right)}{\left(x^3+6\right)^2}$

$$=\frac{\left(x^3+6\right)\left(2x+1\right)-\left(x^2+x-2\right)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+6\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2x^4+x^3+12x+6\right)-\left(3x^4+3x^3-6x^2\right)}{\left(x^3+6\right)^2}$$

$$=\frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{\left(x^3+6\right)^2}$$



ឧទាហរណ៍ទី៩ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $y=\dfrac{e^x}{\left(1+x^2\right)}$ ដែលប៉ះត្រង់ចំណុច $\left(1,\dfrac{1}{2}e\right)$

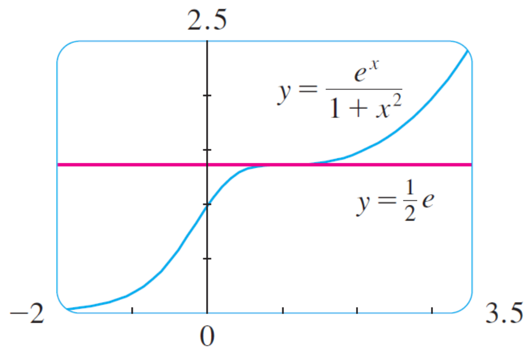
ដំណោះស្រាយ អាស្រ័យតាមច្បាប់នៃផលចែក

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+x^2\right)\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right)-e^x\dfrac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(1+x^2\right)e^x-e^x\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(1-x\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

ដូចនេះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $\left(1,\dfrac{1}{2}e\right)$ គឺ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=0$



មានន័យថាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $\left(1,\frac{1}{2}e\right)$ គឺជាបន្ទាត់ដេកដែល $y=\frac{1}{2}e$ ។ [មើលរូបខាងលើ អនុគមន៍ខាងលើជាអនុគមន៍កើន ហើយកាត់បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $\left(1,\frac{1}{2}e\right)$ ។]

ចំណាំ៖ កុំប្រើ ច្បាប់ផលចែក(Quontient Rule) រាល់ពេលដែលអ្នកឃើញផលចែក។ ពេលខ្លះវាកាន់តែងាយស្រួលក្នុងការសរសេរឡើងវិញនូវបរិមាណដំបូងដើម្បីដាក់វានៅក្នុងទម្រង់ដែលសាមញ្ញជាងសម្រាប់គោលបំណងនៃភាពខុសគ្នាឧទាហរណ៍ ទោះបីជាវាអាចធ្វើទៅបានដើម្បីបែងចែកមុខងារខុសគ្នាក៏ដោយ។

$$F(x)=\frac{3x^2+2\sqrt{x}}{x}$$

ការប្រើប្រាស់ច្បាប់ផលចែក, វាមានទម្រង់ច្រើន ប៉ុន្តែករណីដូចឧទាហរណ៍ខាងលើនេះ យើងត្រូវផ្តាច់ប្រភាគសិន

រួចគណនាតាមច្បាប់នៃផលគុណវិញ។

$$F(x)=3x+2x^{-\frac{1}{2}}$$

ក្រោយពីយើងសិក្សាពីទម្រង់នៃដេរីវេរួចមក យើងសង្ខេបបានរូបមន្តដូចខាងក្រោម៖

តារាងនៃរូបមន្តដេរីវេ

$$\frac{d}{dx}(c)=0 \qquad \frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$$

$$(cf)'=cf' \qquad (f+g)'=f'+g' \qquad (f-g)'=f'-g'$$

$$(fg)'=f'g+g'f \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$$

3.2 លំហាត់

1. រកដេរីវេនៃ $f(x)=\left(1+2x^2\right)\left(x-x^2\right)$ តាមពីររបៀបផ្សេងគ្នា ដោយប្រើតាមច្បាប់នៃផលគុណ និង by performing the multiplication first។ តើចម្លើយទាំងពីររបស់អ្នកផ្ទៀងផ្ទាត់?

2. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $F(x)=\dfrac{x^4-5x^3+\sqrt{x}}{x^2}$ តាមពីរបៀប ដោយប្រើច្បាប់នៃផលចែក និង by simplying first . បង្ហាញថាចម្លើយរបស់អ្នកគឺស្មើគ្នា។ តើវិធីសាស្ត្រមួយណាដែលអ្នកពេញចិត្ត?

$3-26$ គណនាដេរីវេ

3. $f(x)=\left(x^3+2x\right)e^x$

4. $g(x)=\sqrt{x}e^x$

5. $y=\dfrac{x}{e^x}$

6. $y=\dfrac{e^x}{1-e^x}$

7. $g(x)=\dfrac{1+2x}{3-4x}$

8. $G(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+1}$

9. $H(u)=\left(u-\sqrt{u}\right)\left(u+\sqrt{u}\right)$

10. $J(v)=\left(v^3-2v\right)\left(v^4+v^2\right)$

11. $F(y)=\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3}{y^4}\right)\left(y+5y^3\right)$

12. $f(z)=\left(1-e^z\right)\left(z+e^z\right)$

13. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

14. $y=\dfrac{x+1}{x^3+x-2}$

15. $y=\dfrac{t^2+2}{t^4-3t^2+1}$

16. $y=\dfrac{t}{(t-1)^2}$

17. $y=e^p\left(p+p\sqrt{p}\right)$

18. $y=\dfrac{1}{s+ke^s}$

19. $y=\dfrac{v^3-2v\sqrt{v}}{v}$

20. $g(t)=\dfrac{t-\sqrt{t}}{t^{\frac{1}{3}}}$

21. $f(t)=\dfrac{2t}{2+\sqrt{t}}$

22. $g(t)=\dfrac{t-\sqrt{t}}{t^{\frac{1}{3}}}$

23. $f(x)=\dfrac{A}{B+Ce^x}$

24. $f(x)=\dfrac{1-xe^x}{x+e^x}$

25. $f(x)=\dfrac{x}{x+\dfrac{c}{x}}$

26. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$27-30$ រក $f\,'$ និង $f\,''$

27. $f(x)=x^4e^x$

28. $f(x)=x^{\frac{5}{2}}e^x$

29. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+2x}$

30. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

$31-32$ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច

31. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$, $(1,0)$

32. $y=\dfrac{e^x}{x}$, $(1,e)$

$33-34$ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ និងសមីការបន្ទាត់ធម្មតាទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច

33. $y=2xe^{x}$, $(0,0)$ 34. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $(1,1)$

35.(a) ខ្សែកោង $y=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)}$ ត្រូវបានគេហៅថា witch of Miria Agnesi. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ

ត្រង់

ចំណុច $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ ។

(b) សង់ក្រាបនៃខ្សែកោង និងបន្ទាត់ប៉ះក្នុងប្លង់តែមួយ។

36.(a) ខ្សែកោង $y=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)}$ serpentine រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងនេះត្រង់ចំណុច

$(3,0,3)$ ។

(b)សង់ក្រាប និងខ្សែកោងក្នុងប្លង់តែមួយ។

37. (a) បើ $f(x)=\left(x^3-x\right)e^{x}$ ។ រក $f'(x)$

(b) មើលចម្លើយក្នុងចំណុច(a)តើវាសមហេតុផលដែរឬទេបើបប្រៀបធៀបក្រាបនៃ f និង f' ។

38. (a) បើ $f(x)=\dfrac{e^{x}}{2x^2+x+1}$ ។ រក $f'(x)$

(b) មើលចម្លើយក្នុងចំណុច(a) ថាតើវាសមហេតុផលដែរឬទេបើប្រៀបធៀបក្រាប f និង f' ។

39. (a) បើ $f(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)}$ ។ រក $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

(b) មើលចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងចំណុច (a) តើវាសមហេតុផលលើការប្រៀបធៀបក្រាបរវាង f, f' និង f'' ដែរឬទេ?

40.(a) បើ $f(x)=(x^2-1)e^x$ ។ រក $f'(x)$ និង $f''(x)$។

(b) មើលចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងចំណុច (a) តើវាសមហេតុផលឬទេចំពោះការប្រៀបធៀប f, f' និង f'' ។

41. បើ $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ។ រក $f''(1)$

42. បើ $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$ ។ រក $g^n(x)$

43. គេឲ្យ $f(5)=1$, $f'(5)=6$, $g(5)=-3$ និង $g'(5)=2$ ។ រកតម្លៃខាងក្រោម៖

(a) $(fg)'(5)$ (b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5)$ (c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(5)$

44. គេឲ្យ $f(2)=-3$, $g(2)=4$, $f'(2)=-2$ និង $g'(2)=7$ ។ រក $h'(2)$

(a) $h(x)=5f(x)-4g(x)$ (b) $h(x)=f(x)g(x)$

(c) $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x)=\dfrac{g(x)}{1+f(x)}$

45. បើ $f(x)=e^x g(x)$ ដែល $g(0)=2$ និង $g'(0)=5$ ។ រក $f'(0)$

46. បើ $h(2)=4$ និង $h'(2)=-3$ ។ រក $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{h(x)}{x}\right)\Bigg|_{x=2}$

47. បើ $g(x)=xf(x)$ ដែល $f(3)=4$ និង $f'(3)=-2$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប g ត្រង់

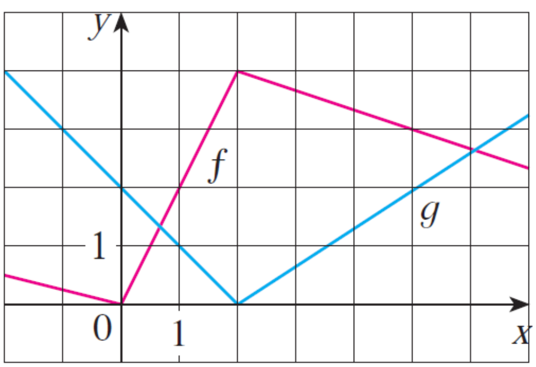
ចំណុច $x=3$ ។

48. បើ $f(2)=10$ និង $f'(x)=x^2 f(x)$ for all x. រក $f''(2)$ ។

49. បើ f និង g គឺជាអនុគមន៍ដែលមានក្រាបដូចដែលបង្ហាញខាងក្រោម។ តាង $u(x)=f(x)g(x)$

និង $v(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ។

(a) រក $u'(1)$ (b) រក $v'(5)$

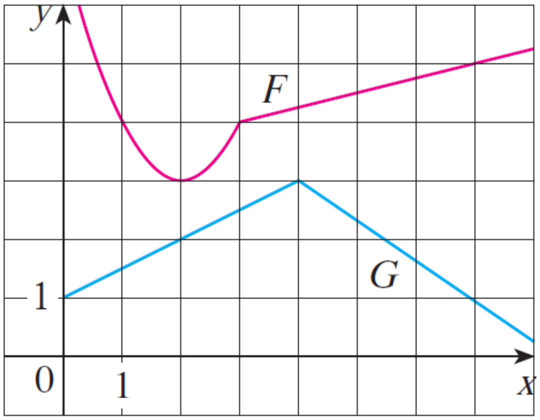


50. តាង $P(x)=F(x)G(x)$ និង $Q(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ ដែល F និង G ជាអនុគមន៍ដែលមានក្រាប

ដូច

ខាងក្រោម។

(a) រក $P'(2)$ (b) រក $Q'(7)$



51. បើ g គឺជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ។ រកកន្សោមនៃដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

$(a)\ y = xg(x)$ $(b)\ y = \dfrac{x}{g(x)}$ $(c)\ y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. បើ f គឺជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ។ រកកន្សោមនៃដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

$(a)\ y = x^2 f(x)$ $(b)\ y = \dfrac{f(x)}{x^2}$ $(c)\ y = \dfrac{x^2}{f(x)}$

$(d)\ y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. តើមានបន្ទាត់ប៉ះប៉ុន្មានដែលប៉ះខ្សែកោង $y = \dfrac{x}{x+1}$ និងកាត់ចំណុច$(1,2)$? រកចំណុចដែលធ្វើឲ្យបន្ទាត់

ប៉ះខ្សែកោង ?

54. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ ដែលបន្ទាត់នេះស្របនឹងបន្ទាត់ $x - 2y = 2$ ។

55. រក $R'(0)$ដែល $R(x) = \dfrac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$

គេឲ្យ៖ ជំនួសការរក $R'(x)$ ដំបូងតាង $f(x)$ ជាភាគយក និង $g(x)$ ជាភាគបែងនៃ $R(x)$ ហើយគណនា $R'(0)$ ពី $f(0), f'(0), g(0)$ និង $g'(0)$ ។

56. ប្រើវិធីសាស្ត្រក្នុងលំហាត់55 ដើម្បីគណនា $Q'(0)$ ដែល $Q(x)=\dfrac{1+x+x^2+xe^x}{1-x+x^2-xe^x}$

57. នៅក្នុងលំហាត់នេះ យើងប៉ាន់ប្រមាណអត្រាដែលប្រាក់ចំណូលផ្ទាល់ខ្លួនសរុបកំពុងកើនឡើងនៅក្នុងទីក្រុង Richmond-Petersburg រដ្ឋ Virginia ដែលជាតំបន់ទីប្រជុំជន។ នៅឆ្នាំ 1999 ចំនួនប្រជាជននៃតំបន់នេះគឺ 961,400នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនកំពុងកើនឡើងប្រហែល 9200 នាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំជាមធ្យមគឺ $30,593 ក្នុងមនុស្សម្នាក់ ហើយជាមធ្យមនេះកំពុងកើនឡើងប្រហែល $1400 ក្នុងមួយឆ្នាំ (មធ្យមភាគថ្នាក់ជាតិប្រហែល $1225 ក្នុងមួយឆ្នាំ)។ ប្រើច្បាប់ផលគុណ និងតួលេខទាំងនេះដើម្បីប៉ាន់ប្រមាណអត្រាដែលប្រាក់ចំណូលផ្ទាល់ខ្លួនសរុបកំពុងកើនឡើងនៅក្នុងតំបន់ Richmond-Petersburg ក្នុងឆ្នាំ 1999។ ពន្យល់ពីអត្ថន័យនៃផ្នែកនីមួយៗនៅក្នុងច្បាប់ផលគុណនេះ។

58. ក្រុមហ៊ុនផលិតផលិតប៊ូឡុងនៃក្រណាត់ដែលមានទទឹងថេរ។ បរិមាណ p នៃក្រណាត់នេះ (វាស់ជាយ៉ាត) ដែលត្រូវបានលក់គឺជាអនុគមន៍នៃតម្លៃលក់ p (គិតជាដុល្លារក្នុងមួយយ៉ាត) ដូច្នេះយើងអាចសរសេរ q = f(p)។ បន្ទាប់មកចំណូលសរុបដែលទទួលបានជាមួយនឹងតម្លៃលក់ p គឺ R(p) = pf(p) ។

(a) តើវាមានន័យយ៉ាងណាក្នុងការនិយាយថា $f(20) = 10.000$ និង $f'(20) = -350$?

(b) សន្មតតម្លៃនៅក្នុងផ្នែក (a) ស្វែងរក R'(20) ហើយបកស្រាយចម្លើយរបស់អ្នក។

59. (a) ប្រើច្បាប់ផលគុណទាំងពីរដើម្បីបង្ហាញថា បើ f, g និង h ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ នោះ

$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ ។

(b). យក $f=g=h$ ក្នុងចំណុច (a) បង្ហាញថា $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]^3 = 3\left[f(x)^2\right]f'(x)$

(c). ប្រើចំណុច (b) ដើម្បីគណនាដេរីវេ $y=e^x$ ។

60. (a) បើ $F(x)=f(x)g(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ។ បង្ហាញថា
$F''=f''g+2f'g'+fg''$ ។

(b) ប្រើរូបមន្តស្រដៀងគ្នាសម្រាប់ F''' និង $F^{(4)}$ ។

(c) ទាញរក $F^{(n)}$ ។

61. រកកន្សោមដេរីវេ៥តួដំបូងនៃ $f(x)=x^2e^x$ តើកន្សោមនេះមានលំនាំគំរូដែរឬទេ ? ទាញរករូបមន្ត $f^{(n)}$

និងបង្ហាញថាវាគឺប្រើក្នុងវាចាក្នុងអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា។

62. (a) បើ g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ, ក្បួនចម្រាស់និយាយថា $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=-\frac{g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

ប្រើច្បាប់ផលចែកដើម្បីបង្ហាញពីក្បួនចម្រាស។

(b) ប្រើក្បួនចម្រាសដើម្បីគណនាដរីវេនៃអនុគមន៍ក្នុងលំហាត់ទី 18 ។

(c) ប្រើក្បួនចម្រាស់ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ថាច្បាប់ស្វ័យគុណគឺមានសុពលភាពសម្រាប់ចំនួនគត់អវិជ្ជមាន នោះ

$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right)=-nx^{-n-1}$ សម្រាប់គ្រប់ចំនួនគត់អវិជ្ជមាន n ។

៣.៣. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

មុនពេលចាប់ផ្តើមសិក្សាចំណុចនេះ, អ្នកប្រហែលជាត្រូវការរំលឹកពីអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។ ពិសេសវាគឺសំ

ខាន់សម្រាប់ចាំនៅពេលដែលយើងនិយាយអំពីអនុគមន៍ f បានកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត x ទាំងអស់ដោយ
$y=\sin x$

$\sin x$ គឺមានន័យថា ស៊ីនុសនៃមុំដែលរង្វាស់ រ៉ាដ្យង់ x ។ ភាពស្រដៀងគ្នាConvention hold សម្រាប់អនុគមន៍

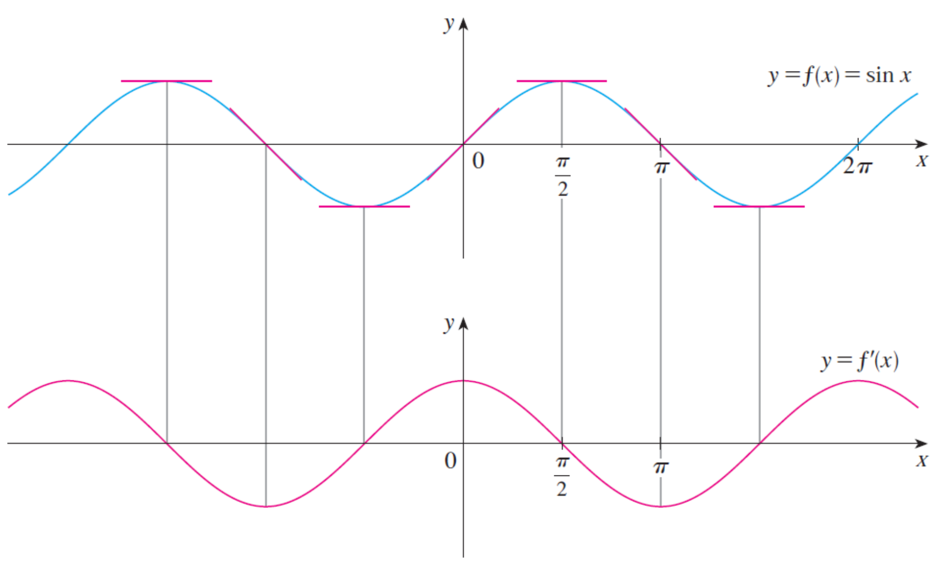
ត្រីកោណមាត្រផ្សេងដូចជា $\cos$, $\tan$, $\csc$, $\sec$ និង $\cot$ ។ (ក្នុងចំណុច 2.5) គ្រប់អនុគមន៍ត្រីកោណ

មាត្រគឺជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់ចំនួនក្នុងដែនកំណត់របស់អនុគមន៍នោះ។

ប្រសិនបើគូសព្រាងក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ និងប្រើការបកស្រាយនៃ $f'(x)$ គឺមេគុណប៉ះទៅខ្សែ

កោងស៊ីនុស ដូចនឹងការគូសព្រាងក្រាបនៃ f' (ក្នុងលំហាត់ទី ១៦ ចំណុច ២.៨), មើលទៅក្រាបនៃ f' វាគឺ

ដូចក្រាបកូសស៊ីនុស(មើលរូប១)។



(រូបទី១)

បើ $f(x)=\sin x$ នោះ $f'(x)=-\cos x$ ។ តាមនិយមន័យនៃដេរីវេយើងបាន:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cosh+\cos x\sinh-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin x\cosh-\sin x}{h}+\frac{\cos x\sinh}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cosh-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sinh}{h}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} \quad , \quad (1)$$

ទំនាក់ទំនង x គឺដូចនឹងមេគុណនឹងមេគុណមួយ នៅពេលដែលលីមីត $h\to 0$ យើងបាន

$\lim_{h\to 0}\sin x=\sin x$ និង $\lim_{h\to 0}\cos x=\cos x$

លីមីតនៃ $\frac{(\sinh)}{h}$ គឺមិនទាន់ជាក់លាក់ទេ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ទី៣ ក្នុងចំណុច២.២យើងបានទាញរកតម្លៃជាលេខ

និងក្រាប $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad , \quad (2)$

យើងប្រើអាគុយម៉ង់ធរណីមាត្រដើម្បីបង្ហាញសមីការ ២ ។ តំបូងសន្មតថា θ ស្ថិតនៅចន្លោះ 0 និង $\frac{\pi}{2}$ ។ ក្នុងរូប

ទី២ (a) បង្ហាញផ្នែកនៃរង្វង់ជាមួយនឹងចំណុចកណ្តាល 0, មុំកណ្តាល θ និងកាំស្មើ 1។ BC គឺគូសកាត់ និង

កែងនឹង OA ។ តាមនិយមន័យនៃវិធានរ៉ាដ្យង់ យើងបាន $arcAB=\theta$ ។ $|BC||OB|\sin\theta=\sin\theta$ ។ តាមដ្យាក្រាមយើងឃើញថា $|BC|<|AB|<arcAB$ ដូច្នេះ $\sin\theta<\theta$ នាំឲ្យ $\frac{\sin\theta}{\theta}<1$

បន្ទាត់ប៉ះ A និង B ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច E ។ អ្នកអាចមើលរូបតី២(b) ដែលបរិមាត្រនៃវង្វង់គឺតូចជាងប្រវែងនៃពហុកោណចារឹក។ ដូចនេះ $AB<|AE|+|EB|$

នោះ $\theta=arcAB<|AE|+|EB|$

$$
\begin{aligned}
&<|AE|+|ED|\\
&=|AD|=|OA|\tan\theta\\
&=\tan\theta
\end{aligned}
$$

(ក្នុងឧបសម្ព័ន្ធ F វិសមភាព $\theta\le\tan\theta$ គឺបានបង្ហាញដោយផ្ទាល់ពីនិយមន័យនៃប្រវែង of an arc without

resorting to geometric intuition as we did here ។

ដូច្នេះយើងបាន $\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ នោះ $\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$

យើងដឹងថា $\lim\limits_{\theta\to 1}1=1$ និង $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta=1$, ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទទាំងពីរយើងបាន: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

យើងបានបង្ហាញសមីការ(2)

ដោយយើងអាចកាត់តម្លៃលីមីតដែលនៅសល់ក្នុងសមីការ(1) ដូចខាងក្រោម៖

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta-1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+1}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin^2 \theta}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \right)$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{0}{1+1} \right) = 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0 \quad , \quad (3)$$

តាម (2) , (3) ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

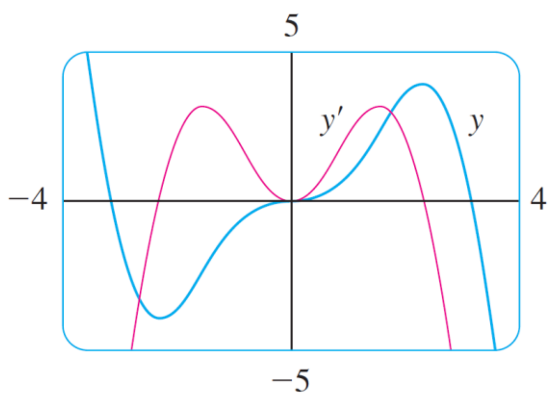
ដូចនេះយើងបានរូបមន្តសម្រាប់ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុស: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad , \quad (4)$

V . ឧទាហរណ៍ទី១ ដេរីវេ $y = x^2 \sin x$

ដំណោះស្រាយ ប្រើច្បាប់នៃផលគុណ និងរូបមន្តទី៤ , យើងបាន:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \sin x$$



ប្រើវិធីសាស្ត្រដូចគ្នាដូចជាការបង្ហាញក្នុងរូបមន្តទី៤, វាអាចស្រាយថា(មើលក្នុងលំហាត់ទី 20)

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad , \quad (5)$$

អនុគមន៍tangentក៏អាចគណនាដេរីវេដោយប្រើនិយមន័យនៃដេរីវេ ប៉ុន្តែវាគឺងាយស្រួលជាងប្រើច្បាប់

ផលចែកជាមួយរូបមន្តទី៤ និងទី៥

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad , \quad (6)$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលនៅសល់មាន $\csc, \sec$ និង $\cot$ អាចរកយ៉ាងងាយស្រួលបើយើងប្រើច្បាប់ផលចែក(មើលលំហាត់១៧-១៩)។ យើងផ្តុំរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រក្នុងតារាងខាងក្រោម។ រូបមន្តខាងក្រោមនេះមានន័យកាលណា x គិតជារ៉ាដ្យង់។

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនាដេរីវេ $f(x) = \dfrac{\sec x}{1+\tan x}$ ។តើតម្លៃ x ណាដែលធ្វើឲ្យក្រាប f មានបន្ទាត់ដេក ?

ដំណោះស្រាយ តាមច្បាប់ផលចែក

$$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

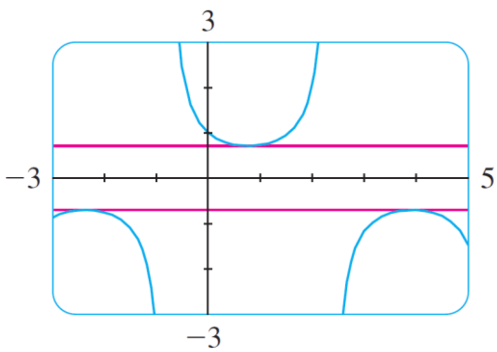
$$= \frac{(1+\tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\left(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x\right)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1+\tan x)^2}$$

ដោយ $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ ព្រោះ $\sec x \neq 0$, យើងឃើញថា $f'(x) = 0$ នៅពេលដែល

$\tan x = 1$ ហើយ $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ ដែល n គឺជាចំនួនគត់(រូបទី៤)។



អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្របានប្រើប្រាស់ជាគំរូក្នុងបាតុភូតពិតនៃធម្មជាតិ។ ជាពិសេសដូចជាលំញ័រ រលក ចលនាឃឺត និងបរិមាណផ្សេងទៀតដែលលក្ខខណ្ឌនៃការកំណត់ខុសគ្នាអាចបកស្រាយដោយការប្រើប្រាស់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។ ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងក្រោមយើងពិភាក្សាចំនួនថេរមួយនៃចលនាអាម៉ូនិកធម្មតា។

V. ឧទាហរណ៍ទី៤ រកដេរីវេទី២៧នៃ $\cos x$

ដំណោះស្រាយ ដេរីវេពីរបីតួដំបូងនៃ $f(x) = \cos x$ ខាងក្រោម៖

$$f'(x) = -\sin x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \sin x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x$$

យើងឃើញថាដេរីវេបន្តបន្ទាប់កើតឡើងក្នុងវដ្តនៃប្រវែង៤ ហើយពិសេស $f^{(n)} = \cos x$ ដែល n គឺជាពហុគុណនៃ៤។ ដូច្នេះ $f^{(24)}(x) = \cos x$ ហើយដេរីវេ៣ដងទៀតយើងបាន

$f^{(27)}(x) = \sin x$

ការប្រើប្រាស់សំខាន់របស់យើងសម្រាប់លីមីតក្នុងសមីការ២,ដែលបង្ហាញរូបមន្តដេរីវេសម្រាប់អនុគមន៍ស៊ីនុស។ ប៉ុន្តែលីមីតនេះតែងតែប្រើសម្រាប់រកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រជាក់លាក់ផ្សេងទៀត ដូចក្នុងឧទាហរណ៍២ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ទី5 រក $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$

ដំណោះស្រាយ អនុវត្តន៍សមីការ២,យើងសរសេរអនុគមន៍ដោយគុណនិងចែកដោយ៧

$$\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$$

បើយើងតាង $\theta = 7x$ នោះ $\theta \to 0$ នោះ $x \to 0$, តាមសមីការ(2) យើងបាន

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$$

$$= \frac{7}{4}\lim_{\theta \to 0}\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}$$

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\lim\limits_{x \to 0} x\cot x$

ដំណោះស្រាយ យើងចែកភាគយក និងបែងដោយ x

$$\lim_{x \to 0} x\cot x = \lim_{x \to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{\cos 0}{1}=1$$

3.3 លំហាត់

$1-6$ ដេរីវេ

1. $f(x)=3x^2-2\cos x$

2. $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

3. $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cot x$

4. $y=2\sec x-\csc x$

5. $y=\sec\theta\tan\theta$

6. $g(\theta)=e^{\theta}(\tan\theta-\theta)$

7. $y=c\cos t+t^2\sin t$

8. $f(t)=\frac{\cot t}{e^t}$

9. $y=\frac{x}{2-\tan x}$

10. $y=\sin\theta\cos\theta$

11. $f(\theta)=\frac{\sec\theta}{1+\sec\theta}$

12. $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

13. $y=\frac{\sin t}{1+t}$

14. $y=\frac{1-\sec x}{\tan x}$

15. $f(x)=xe^x\csc x$

16. $y=x^2\sin x\tan x$

17. បង្ហាញថា $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

18. បង្ហាញថា $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

19. បង្ហាញថា $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

20. បង្ហាញដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ បើ $f(x) = \cos x$ នោះ $f'(x) = -\sin x$ ។

$21-24$. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំណុច៖

21. $y = \sec x, \left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 22. $y = e^x \cos x$, $(0,1)$

23. $y = \cos x - \sin x$, $(\pi, -1)$ 24. $y = x + \tan x$, (π, π)

25. (a) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង $y = 2x\sin x$ ត្រង់ចំណុច $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(b) គូសក្រាប និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្នុងប្លង់តែមួយ។

26. (a) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង $y = 3x + 6\cos x$ ត្រង់ចំណុច $\left(\frac{\pi}{3}, \pi + 3\right)$

(b) គូសក្រាប និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្នុងប្លង់តែមួយ។

27. (a) បើ $f(x) = \sec x - x$ ។ រក $f'(x)$

(b) យកចម្លើយក្នុងចំណុច (a) គឺសមហេតុផលដោយក្រាបទាំងពីរ f និង f' សម្រាប់ $|x| < \frac{\pi}{2}$

28. (a) បើ $f(x) = e^x \cos x$ ។ រក $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

(b) ពិនិត្យមើលចម្លើយក្នុងចំណុច (a) ថាសមហេតុផលដោយក្រាប f, f' និង f'' ។

29. បើ $H(\theta) = \theta\sin\theta$, រក $H'(\theta)$ និង $H''(\theta)$

30. បើ $f(t)=\csc t$ ។ រក $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$

31. (a) ប្រើច្បាប់ផលចែកដើម្បីគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\sec x}$

(b) សម្រួលកន្សោមសម្រាប់ $f(x)$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ $\sin x$ និង $\cos x$ រួចរក $f'(x)$ ។

(c) បង្ហាញចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងចំណុច (a) និង (b) ថាផ្ទៀងផ្ទាត់។

32. ឧបមា $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$ និង $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2$, តាង $g(x)=f(x)\sin x$ ហើយ

$h(x)=\dfrac{(\cos x)}{f(x)}$

រក $(a).g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $(b).h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

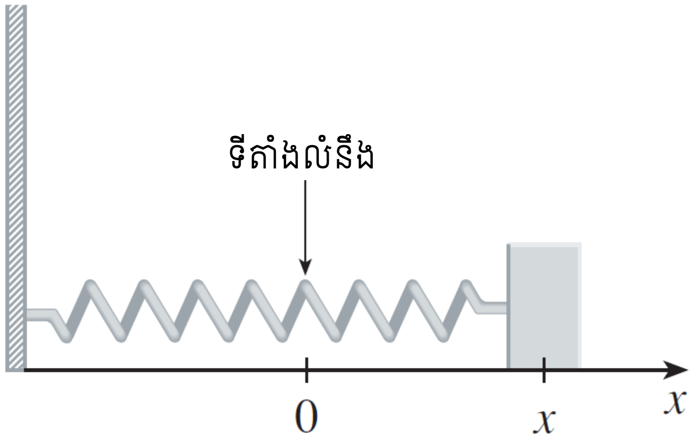
$33-34.$ តើតម្លៃ x ណាដែលធ្វើឲ្យក្រាប f មានបន្ទាត់ដេកជាបន្ទាត់ប៉ះ ?

33. $f(x)=x+2\sin x$ $(x)=e^x\cos x$

35. ម៉ាសនៅលើរ៉ឺស័រផ្ដេកនៃផ្ទៃរលោង (មើលរូប)។ សមីការនៃចលនារបស់វាគឺ $x(t)=8\sin t$ ដែល t គិតជាវិនាទី (s) និង x គិតជា (cm) ។

(a) រកល្បឿន និងសំទុះខណៈពេល t

(b) រកទីតាំង នៃល្បឿន និងសំទុះនៃម៉ាសខណៈពេល $t=\dfrac{2\pi}{3}$ ។ តើទិសដៅអ្វីដែលផ្លាស់ប្ដូរខណៈពេលនោះ ?



36. គេព្យួរខ្សែយឺតមួយនៅលើទំពួក ហើយគេយកម៉ាសមួយព្យួរភ្ជាប់នៅខាងចុងនៃខ្សែនេះ។ នៅពេលដែលម៉ាស
បានទាញចុះក្រោម រួចក៏របូតចេញ ហើយធ្វើឲ្យខ្សែយឺតញ័របង្កើតបានសមីការចលនា

$s=2\cos t+3\sin t,\ t\geq 0$ ដែល s គិតជា cm និង t គិតជា (s) ។ (ទិសដៅដែលរបូតចុះក្រោមជាទិស
ដៅវិជ្ជមាន)។

(a) រកល្បឿន និងសំទុះខណៈពេល t

(b) គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ល្បឿន និងសំទុះ។

(c) តើនៅពេលណាដែលម៉ាសឆ្លងកាត់ទីតាំងលំនឹងខណៈពេលដំបូង ?

(d) រកចម្ងាយដែលម៉ាសផ្លាស់ទីពីទីតាំងលំនឹង។

(e) តើល្បឿនដែលលឿនបំផុតនៅពេលណា ?

37. ជណ្តើរមួយមានប្រវែង10 ហ្វីត ដែលដាក់ផ្អែកទៅនឹងជញ្ជាំងបញ្ឈរ។ តាង θ ជាមុំរវាងចុងខាងលើនៃជណ្តើរ

ទៅនឹងជញ្ជាំង ហើយតាង x ជាចម្ងាយពីចុងខាងក្រោមនៃជណ្តើរទៅជញ្ជាំង។ បើគេរំកិលចុងខាងក្រោមនៃជណ្តើរ

ចេញពីជញ្ជាំង តើ x មានចម្ងាយប៉ុន្មាន បើ $\theta = \dfrac{\pi}{3}$?

38. វត្ថុមួយមានទម្ងន់តាងដោយ W ហើយគេអូសវត្ថុនោះតាមបណ្តោយប្លង់ដេកដោយប្រើខ្សែពួរភ្ជាប់ហើយបង្កើត

បានមុំរវាងប្លង់នឹងខ្សែដោយ θ និងរ៉ិចទ័រកម្លាំងគឺ $F = \dfrac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$ ដែល μ គឺជាចំនួនថេរមួយដែលគេ

ហៅថា មេគុណកកិត។

(a) រកអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរនៃ F អាស្រ័យនឹង θ ។

(b) តើនៅពេលណាដែលធ្វើឲ្យអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរស្មើនឹងសូន្យ ?

(c) បើ $W = 50$ ផោន និង $\mu = 0.6$, គូសក្រាប F ជាអនុគមន៍នៃ θ និងប្រើវាដើម្បីរកតម្លៃនៃ θ ដែល $\dfrac{dF}{d\theta} = 0$ ។ តើតម្លៃត្រូវនឹងចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងចំណុច (b) ដែរឬទេ ?

$39-48$ រកតម្លៃលីមីត

$39.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ $40.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$

$41.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan 6t}{\sin 2t}$ $42.\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$

$43.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x^3 - 4x}$ $44.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{x^2}$

$45.\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta + \tan\theta}$ $46.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$

47. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$ 48. $\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$

$49-50$. រកតួជំបូងនៃដេរីវេដោយសង្កេតមើលទៅលំនាំគំរូនៃដេរីវេដែលគេឲ្យ

49. $\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x)$ 50. $\frac{d^{35}}{dx^{35}}(x\sin x)$

51. រកចំនួនថេរ A និង B ដែលគេឲ្យអនុគមន៍ $y=A\sin x+B\cos x$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់

ស្យែល $y''+y'-2y=\sin x$ ។

52. (a) គណនាលីមីត $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

(b) គណនាលីមីត $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

(c) ឧទាហរណ៍ចំណុច a និង b ដោយគូសក្រាប $y=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

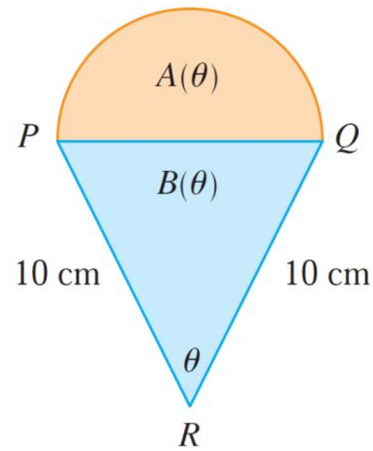
53. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនីមួយៗ

(a) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ (b) $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ (c) $\sin x+\cos x=\frac{1+\cot x}{\csc x}$

54. គេមានពាក់កណ្ដាលរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត PQ ស្ថិតនៅលើជ្រុងនៃត្រីកោណសមបាត PQR ដែលមាន

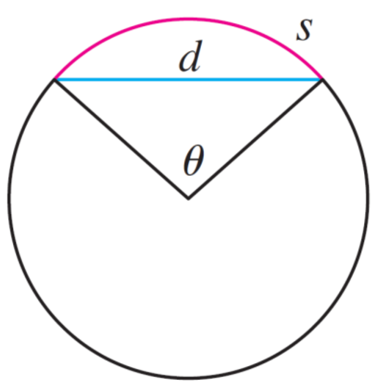
ពីរវិមាត្រដូចការ៉េម(ដូចរូប)។ បើ $A(\theta)$ ជាផ្ទៃក្រឡាពាក់កណ្ដាលរង្វង់ និង $B(\theta)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ។

គណនា $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$



55. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីធ្នូរនៃរង្វង់ដែលមានប្រវែង s និងមានអង្កត់ធ្នូរតាងដោយ d , ដែលចុងទាំងសងខាង

នៃអង្កត់ធ្នូរបង្កើតបានមុំ θ ។ រក $\lim_{\theta\to 0^+}\dfrac{s}{d}$



56. តាង $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

(a) Graph f. What type of discontinuity does it appear to have at 0 ?

(b) គណនាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 ។ យកតម្លៃនេះទៅបញ្ជាក់ចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងចំ

ណុច (a) ?

3.4 ក្បួននៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $F(x)=\sqrt{x^2+1}$

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីរូបមន្តដេរីវេក្នុងចំណុចមុននៃជំពូកនេះ មិនអាចគណនា $F'(x)$

សង្កេតមើល F គឺជាជាតុនៃអនុគមន៍។ ជាការពិតបើយើងតាង $y=f(u)=\sqrt{u}$ និង

$u=g(x)=x^2+1$

, បន្ទាប់មកយើងសរសេរ $y=F(x)=f(g(x))$, ដែល $F=f\circ g$ ។ យើងដឹងពីរបៀបនៃការ

គណនាដេរី

វេនៃអនុគមន៍ f និង g , រកដេរីវេនៃ $F=f\circ g$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌដេរីវេនៃ f និង g ។

It turns out that the ដេរីវេនៃជាតុអនុគមន៍ $f\circ g$ គឺជាផលគុណនៃដេរីវេនៃ f និង g ។ ជាការពិត

ណាស់វា

គឺសំខាន់ខ្លាំងនៃច្បាប់ដេរីវេ ហើយបានហៅថាច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់។ វាហាក់ដូចជាអាចទុកចិត្តបាន

បើយើង

ស្រាយដេរីវេដូចអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរ។ $\dfrac{du}{dx}$ ដូចអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរនៃ u អាស្រ័យ x , $\dfrac{dy}{du}$ ដូចអត្រានៃ

ការផ្លាស់

ប្តូរនៃ y អាស្រ័យ u និង $\dfrac{dy}{dx}$ ដូចជាអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរនៃ y អាស្រ័យនឹង x ។ បើ u ផ្លាស់ប្តូរលឿន

ជាងពីរដង

x និង y ផ្លាស់ប្តូរលឿនជាងបីដង u , យើងឃើញថាវាហាក់ដូចជាសមហេតុផលដែល y លឿនជាង៦

ដង x ។

ដូចនេះយើងបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

ច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ បើ g មានដេរីវេត្រង់ x និង f មានដេរីវេត្រង់ $g(x)$, នោះជាតុនៃអនុគម $F=f\circ g$

កំណត់ដោយ $F(x)=f\left(g(x)\right)$គឺមានដេរីវេត្រង់ x និង F' គឺបានឲ្យដោយផលគុណ $F'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

ក្នុងការកំណត់ Leibniz, បើ $y=f(u)$ និង $u=g(x)$គឺជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ នោះ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

បង្ហាញច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ តាង Δu ជាបម្រែបម្រួលនៃ u ត្រូវគ្នាទៅនឹងការផ្លាស់ប្ដូរ Δx ដែលជាបម្រែបម្រួល

នៃ x នោះ $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$

ភាពត្រូវគ្នានៃការផ្លាស់ប្ដូរនៃ y គឺ $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$

វាគឺtempting to write

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad , \qquad (1)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ (ចំណាំ $\Delta u \to 0 = \Delta x \to 0$ ព្រោះ g ជាអនុគមន៍បណ្តាក់)

$= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

វិបាកនៅក្នុងករណីរនេះគឺនៅក្នុងសមីការ (1) ដែល $\Delta u = 0$,$(\Delta u = 0)$ ។ ម្យ៉ាងទៀតយើងមិនអាចចែកនឹងសូន្យ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយហេតុផលនេះមិនអាចនាំឲ្យច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ថាពិតបានឡើយ។ សម្រាយ

បញ្ជាក់បានស្រាយនៅចុងបញ្ចប់នៃចំណុចនេះ។

ច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ដំបូងសរសេរថា $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) \quad , \quad (2)$

ឬបើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះក្នុងការកំណត់របស់លោក Leibniz បានសរសេរថា

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

សមីការ (3) គឺវាងាយស្រួលលចាំព្រោះបើ $\frac{dy}{du}$ និង $\frac{du}{dx}$ គឺបានចែក, បន្ទាប់មកយើងអាចសម្រួល du ។ ចំ

ណាំថាទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយថា du មិនអាចកំណត់ និង $\frac{du}{dx}$ មិនគិតថាជាការចែករបស់វាពិត។

ឧទាហរណ៍ទី១ រក $F'(x)$ បើ $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

ដំណោះស្រាយទី១ (ប្រើសមីការ 2) នៅដើមនៃចំណុចនេះយើងបានបង្ហាញថា F គឺ

$F(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x))$ ដែល $f(u) = \sqrt{u}$ និង $g(x) = x^2+1$ ព្រោះ

$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ និង $g'(x) = 2x$

យើងបាន $F'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

ដំណោះស្រាយទី២ (ប្រើសមីការ 2) បើយើងតាង $u=x^2+1$ និង $y=\sqrt{u}$ នោះ

$$F'(x)=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

នៅពេលប្រើសមីការ3 យើងគួចងចាំថា $\frac{dy}{dx}$ អាស្រ័យលើដេរីវេនៃ y ដែល y ជាអនុគមន៍នៃ x (គេហៅថាដេរី

វេនៃ y គឺអាស្រ័យនឹង x)។ ចំណែកឯ $\frac{dy}{du}$ គឺអាស្រ័យលើដេរីវេនៃ y ដែលចាត់ទុកជាអនុគមន៍នៃ u (ដេរីវេនៃ x

គឺអាស្រ័យលើ u)។ ជាឧទាហរណ៍ ក្នុងឧទាហរណ៍ទី១, y ជាអនុគមន៍នៃ x $\left(y=\sqrt{x^2+1}\right)$ និងអនុ គមន៍ u

$(y=\sqrt{u})$ ។ចំណាំ $\frac{dy}{dx}=F'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ចំណែកឯ $\frac{dy}{du}=f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$

ចំណាំ ក្នុងការប្រើច្បាប់នៃអនុមន៍បណ្ដាក់ យើងគណនាវាពីក្រៅមកក្នុង។ រូបមន្ត២និយាយថា ដេរីវេ f នៃ $g(x)$

បន្ទាប់មកគុណនឹង $g'(x)$ ។

V ឧទាហរណ៍ទី២ គណនាដេរីវេនៃ (a) $y=\sin(x^2)$ និង (b) $y=\sin^2 x$

ដំណោះស្រាយ (a) បើ $y=\sin(x^2)$

4. **ច្បាប់នៃស្វ័យគុណនិងអនុគមន៍បណ្ដាក់** បើ n គឺជាចំនួនពិត និង $u=g(x)$ ជាអនុគមន៍ដេរីវេ នោះ

$\frac{d}{dx}=(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ ជំនួស $u=g(x)$

$\frac{d}{dx}[g(x)]^n=n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍១ យើងអាចគណនាដោយយក $n=\frac{1}{2}$ រួចប្រើរូបមន្តក្នុងចំណុចទី៤ក៏បាន។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនាដេរីវេ $y=(x^3-1)^{100}$

ដំណោះស្រាយ យក $u=g(x)=x^3-1$ និង $n=100$ ក្នុងចំណុចយើងបាន

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3-1)^{100}=100(x^3-1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3-1)$$

$$=100(x^3-1)^{99}\cdot 3x^2=300x^2(x^3-1)^{99}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤ រក $f'(x)$ បើ $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

ដំណោះស្រាយ យើងមាន $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}=(x^2+x+1)^{-\frac{1}{3}}$

នោះ $f'(x)=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}\frac{d}{dx}(x^2+x+1)$

$$=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(2x+1)$$

ឧទាហរណ៍ទី៥ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $g(t)=\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

ដំណោះស្រាយ តាម ច្បាប់នៃស្វ័យគុណ ច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់និងច្បាប់នៃផលចែកយើងបាន៖

$$g'(t)=9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

$$=9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{(2t+1)\cdot 1-2(t-2)}{(2t+1)^2}=\frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនាដេរីវេនៃ $y=(2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^4$

ដំណោះស្រាយ ក្នុងឧទាហរណ៍នេះយើងត្រូវប្រើច្បាប់នៃផលគុណ មុនប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

$$\frac{dy}{dx}=(2x+1)^5\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)^4+\left(x^3-x+1\right)^4\frac{d}{dx}(2x+1)^5$$

$$=(2x+1)^5\cdot 4\left(x^3-x+1\right)^3\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)+\left(x^3-x+1\right)^4\cdot 5(2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)$$

យើងឃើញថាគ្រប់តួគឺមាន $(2x+1)$ ជាកត្តា ដូចនេះយើងត្រូវចាប់វាជាកត្តារួម

$$\frac{dy}{dx}=2(2x+1)^4\left(x^3-x+1\right)^3\left(17x^3+6x^2-9x+3\right)$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ រកដេរីវេនៃ $y=e^{\sin x}$

ដំណោះស្រាយ យើងតាង $g(x)=\sin x$ ជាអនុគមន៍នៃ f ដែល $f(x)=e^x$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូ

តាមច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់យើងបាន $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right)=e^{\sin x}\dfrac{d}{dx}(\sin x)=e^{\sin x}\cos x$

យើងប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ដើម្បីគណនាច្បាប់នៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ក្នុងករណី $a>0$ នៅក្នុង

ចំណុច1.6 យើងមាន $a=e^{\ln a}$ ។ ដូចនេះ $a^{x}=\left(e^{\ln a}\right)^{x}=e^{(\ln a)^{x}}$

តាមច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់យើងបាន $\frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right)=e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$

$=e^{(\ln a)x}\cdot\ln a=a^{x}\ln a$

ព្រោះ a ជាចំនួនថេរ ដូចនេះយើងបានរូបមន្តទូទៅ $\frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=a^{x}\ln a \quad , \quad (5)$

ក្នុងករណី $a=2$ យើងបាន $\frac{d}{dx}\left(2^{x}\right)=2^{x}\ln 2 \quad , \quad (6)$

ក្នុងចំណុច3.1 យើងបានប៉ានស្មានរួចហើយ $\ln 2=0.69$ ដូចនេះ $\frac{d}{dx}\left(2^{x}\right)=(0.69)2^{x}$

ច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ យើងប្រើវានៅពេលមានបណ្តាក់អនុគមន៍វែងដោយបន្ថែមតួផ្សេងជំនួស ឧបមាថា $y=f(u)$, $u=g(x)$ និង $x=h(t)$ ដែល f,g និង h គឺជាអនុគមន៍មានដេរីវេ។ដូចនេះ ដើម្បីគណនា

ដេរីវេនៃ y អាស្រ័យនឹង t យើងប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ពីរ $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$

$V.$ **ឧទាហរណ៍ទី៨** បើ $f(x)=\sin(\cos(\tan x))$

នោះ $f'(x)=\cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$

$=\cos(\cos(\tan x))\left[-\sin(\tan x)\right]\frac{d}{dx}(\tan x)$

$=-\cos\left(\cos\left(\tan x\right)\right)\sin\left(\tan x\right)\sec^2 x$

យើងបានប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ពីរដង

ឧទាហរណ៍ទី៩ $y=e^{\sec 3\theta}$

ដំណោះស្រាយ

$$\frac{dy}{d\theta}=e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sec 3\theta\right)$$

$$=e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}\left(3\theta\right)$$
$$=3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta$$

របៀបបង្ហាញអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $y=f\left(x\right)$ និង x ប្ដូរពី a ទៅ $a+\Delta x$ យើងកំណត់កំណើននៃ y ជា
$\Delta y=f\left(a+\Delta x\right)-f\left(a\right)$

យោងតាមនិយមន័យនៃដេរីវេយើងបាន: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'\left(a\right)$

ដូចនេះយើងកំណត់ដោយ ε មានដេរីវេនៃផលចែកនិងដេរីវេ។ យើងបាន

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'\left(a\right)\right)=f'\left(a\right)-f'\left(a\right)=0$$

តែ $\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'\left(a\right)\Rightarrow\Delta y=f'\left(a\right)\Delta x+\varepsilon\Delta x$

បើយើងកំណត់ $\varepsilon=0$ នោះ $\Delta x=0$, នោះ ε ជាអនុគមន៍ជាប់នៃ Δx ។ នោះដេរីវេនៃអនុគមន៍ f យើងបាន:

$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x$ ដែល $\varepsilon \to 0$ ដូច $\Delta x \to 0$, (7)

ហើយ ε គឺជាអនុគមន៍ជាប់នៃ Δx ។ លក្ខណៈនៃអនុមន៍ដេរីវេនេះគឺយើងត្រូវប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់។

ច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ ឧបមាថា $u = g(x)$ គឺមានដេរីវេត្រង់ a និង $y = f(u)$ មានដេរីវេត្រង់ $b = g(a)$។ បើ Δx កើនដោយ x និង $\Delta u, \Delta y$ គឺត្រូវគ្នាក្នុងការកើនឡើង u និង y, បន្ទាប់មកយើងប្រើ

សមីការ (7) យើងបាន $\Delta u = g'(a)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x = \left[g'(a) + \varepsilon_1\right]\Delta x$, (8)

ដែល $\varepsilon_1 \to 0$ ដូច $\Delta x \to 0$ ដូចគ្នាដែរ $\Delta y = f'(b)\Delta u + \varepsilon_2\Delta u = \left[f'(b) + \varepsilon_2\right]\Delta u$, (9)

ដែល $\varepsilon_2 \to 0$ ដូច $\Delta u \to 0$ ។ បើយើងជំនួស Δu ក្នុងសមីការ (8) ក្នុងសមីការ (9) យើងបានៈ

$$\Delta y = \left[f'(b) + \varepsilon_2\right]\left[g'(a) + \varepsilon_1\right]\Delta x$$

ដូចនេះ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'(b) + \varepsilon_2\right]\left[g'(a) + \varepsilon_1\right]$

ដោយ $\Delta x \to 0$, សមីការ8 បង្ហាញថា $\Delta u \to 0$, ដូចនេះ $\varepsilon_1 \to 0$ និង $\varepsilon_2 \to 0$ ដូច $\Delta x \to 0$

ដូចនេះ $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[f'(b) + \varepsilon_2\right]\left[g'(a) + \varepsilon_1\right]$

$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

នេះជាការបង្ហាញអនុគមន៍បណ្តាក់។

3.4 លំហាត់

$1-6$ សរសេរសមាសធាតុនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមក្នុងទម្រង់ $f\left(g\left(x\right)\right)$ ។កំណត់ inner function $u=g\left(x\right)$

និង the outer function $y=f\left(u\right)$។ រកដេរីវេនៃ $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\sqrt[3]{1+4x}$ 2. $y=\left(2x^3+5\right)^4$ 3. $y=\tan\pi x$

4. $y=\sin\left(\cot x\right)$ 5. $y=e^{\sqrt{x}}$ 6. $y=\sqrt{2-e^x}$

$7-46$. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍

7. $F\left(x\right)=\left(x^4+3x^2-2\right)^5$ 8. $F\left(x\right)=\left(4x-x^2\right)^{100}$

9. $F\left(x\right)=\sqrt{1-2x}$ 10. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(1+\sec x\right)^2}$

11. $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 12. $f\left(t\right)=\sin\left(e^t\right)+e^{\sin t}$

13. $y=\cos\left(a^3+x^3\right)$ 14. $y=a^3+\cos^3 x$

15. $y=xe^{-kx}$ 16. $y=e^{-2t}\cos 4t$

17. $f\left(x\right)=\left(2x-3\right)^4\left(x^2+x+1\right)^5$ 18. $g\left(x\right)=\left(x^2+1\right)^3\left(x^2+2\right)^6$

19. $h\left(t\right)=\left(t+1\right)^{\frac{2}{3}}\left(2t^2-1\right)^3$ 20. $F\left(t\right)=\left(3t-1\right)^4\left(2t+1\right)^{-3}$

21. $y=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$ 22. $f\left(s\right)=\sqrt{\dfrac{s^2+1}{s^2+4}}$

$23.\ y=\sqrt{1+2e^{3x}}$

$24.\ y=10^{1-x^2}$

$25.\ y=5^{-\frac{1}{x}}$

$26.\ G(y)=\dfrac{(y-1)^4}{(y^2+2y)^5}$

$27.\ y=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+1}}$

$28.\ y=\dfrac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$

$29.\ F(t)=e^{t\sin 2t}$

$30.\ F(v)=\left(\dfrac{v}{v^3+1}\right)^6$

$31.\ y=\sin(\tan 2x)$

$32.\ y=\sec^2(m\theta)$

$33.\ y=2^{\sin \pi t}$

$34.\ y=x^2e^{-\frac{1}{x}}$

$35.\ y=\cos\left(\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$

$36.\ y=\sqrt{1+xe^{-2x}}$

$37.\ y=\cot^2(\sin\theta)$

$38.\ y=e^{k\tan\sqrt{x}}$

$39.\ f(t)=\tan(e^t)+e^{\tan t}$

$40.\ y=\sin(\sin(\sin x))$

$41.\ f(t)=\sin^2\left(e^{\sin^2 t}\right)$

$42.\ y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$43.\ g(x)=(2ra^{rx}+n)^p$

$44.\ y=2^{3^{x^2}}$

$45.\ y=\cos\sqrt{\sin(\tan \pi x)}$

$46.\ y=\left[x+(x+\sin^2 x)^3\right]^4$

$47-50$ រក y' និង y''

47. $y=\cos\left(x^2\right)$ 48. $y=\cos^2 x$

49. $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 50. $y=e^{e^x}$

$51-54$ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង ដែលគេឲ្យចំណុចដូចខាងក្រោម៖

51. $y=(1+2x)^{10}$, $(0,1)$ 52. $y=\sqrt{1+x^3}$, $(2,3)$

53. $y=\sin(\sin x)$, $(\pi,0)$ 54. $y=\sin x+\sin^2 x$, $(0,0)$

55. (a) រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង $y=\dfrac{2}{\left(1+e^{-x}\right)}$ ត្រង់ចំណុច $(0,1)$

(b) ឧទាហរណ៍ផ្នែក (a) ដោយគូសខ្សែកោង និងបន្ទាត់ប៉ះក្នុងប្លង់តែមួយ

56. (a) ខ្សែកោង $y=\dfrac{|x|}{\sqrt{2-x^2}}$ ត្រូវបានគេហៅថាខ្សែកោង bullet-nose។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង

នេះត្រង់ចំណុច $(1,1)$ ។

(b) ក្នុងផ្នែក (a) ចូរសង់ក្រាបនៃខ្សែកោងក្នុងប្លង់តែមួយ។

57. (a) បើ $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$ រក $f'(x)$

(b) ពិនិត្យមើលចម្លើយរបស់អ្នកក្នុង (a) គឺផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបក្រាប f និង f' ។

58. អនុគមន៍ $f(x)=\sin(x+\sin 2x)$, $0\le x\le\pi$ កើនឡើងនៅការសំយោគរកតម្លៃនៃប្រកង់ (FM) ។

(a) ប្រើក្រាប f ដើម្បីគូសព្រាងក្រាប f' ។

(b) គណនា $f'(x)$ និងប្រើកន្សោមនេះ, ក្រាប f' ។ រួចប្រៀបធៀបចម្លើយក្នុងចំណុច (a) ។

59. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)=2\sin x+\sin^2 x$ ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក។

60. រកកូអរដោនេ x នៃគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y=\sin 2x-2\sin x$ ដែលបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក។

61.បើ $F(x)=f(g(x))$ ដែល $f(-2)=8, f'(-2)=4$, $f'(5)=3, g(5)=-2$ និង $g'(5)=6$។ រក $F'(5)$

62. បើ $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$ ដែល $f(1)=7$ និង $f'(1)=4$។ រក $h'(1)$

63. គេឲ្យតារាងនៃតម្លៃនៃ f, g, f' និង g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) បើ $h(x)=f(g(x))$, រក $h'(1)$

(b) បើ $H(x)=g(f(x))$, រក $H'(1)$

64. តាងអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ក្នុងលំហាត់ទី 63

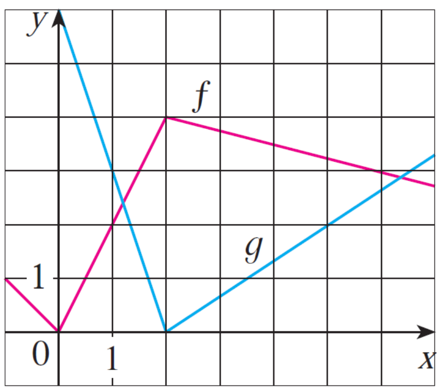
(a) បើ $F(x)=f(f(x))$,រក $F'(2)$

(b) បើ $G(x)=g(g(x))$, រក $G'(3)$

65. បើ f និង g គឺជាអនុគមន៍ដែលមានក្រាបដូចដែលបង្ហាញ, តាង $u(x)=f(g(x)), v(x)=g(f(x))$ និង $w(x)=g(g(x))$ ។ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗ, បើវា

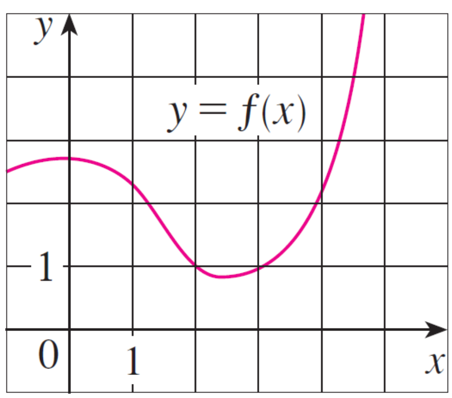
មាន។ បើគ្មាន, ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វី។

$(a)\ u'(1)$ $(b)\ v'(1)$ $(c)\ w'(1)$

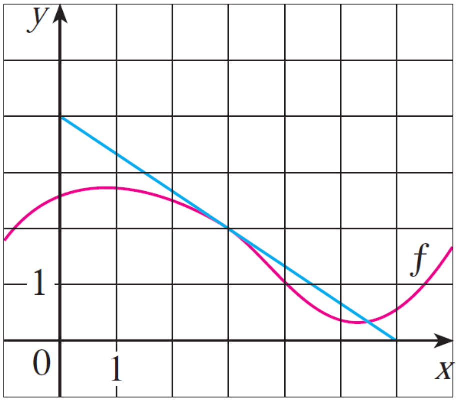


66. បើ f គឺជាអនុគមន៍ដែលមានក្រាបដូចដែលបង្ហាញក្នុងរូប, តាង $h(x)=f(f(x))$ និង $g(x)=f(x^2)$ ។ ប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដើម្បីប៉ានស្មានតម្លៃនៃដេរីវេនីមួយៗ។

$(a)\ h'(2)$ $(b)\ g'(2)$



67. បើ $g(x)=\sqrt{f(x)}$, ដែលមានក្រាបដូចដែលបង្ហាញ, គណនា $g'(3)$



68. ឧបមាថា f មានដេរីវេលើ□ និង α គឺជាចំនួនពិត។ តាង $F(x)=f\left(x^{\alpha}\right)$ និង $G(x)=\left[f(x)\right]^{\alpha}$ ។

រកកន្សោមនៃ (a) $F'(x)$ និង (b) $G'(x)$ ។

69. ឧបមាថា f គឺមានដេរីវេលើ□ ។ តាង $F(x)=f\left(e^{x}\right)$ និង $G(x)=e^{f(x)}$ ។ រកកន្សោមនៃ (a) $F'(x)$ និង (b) $G'(x)$

70. តាង $g(x)=e^{cx}+f(x)$ និង $h(x)=e^{kx}f(x)$ ដែល $f(0)=3, f'(0)=5$ និង $f''(0)=-2$ ។

(a) រក $g'(0)$ និង $g''(0)$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ c ។

(b) ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ k ។ រកសមីការមួយនៃសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង h ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

71. តាង $r(x)=f\left(g\left(h(x)\right)\right)$, ដែល $h(1)=2$, $g(2)=3$, $h'(1)=4$, $g'(2)=5$ និង $f'(3)=6$ ។ រក $f'(1)$

72. បើ g គឺជាអនុគមន៍មួយដែលបានដេរីវេពីរដង និង $f(x)=xg\left(x^{2}\right)$ ។ រក f'' ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ g, g' និង g'' ។

73. បើ $F(x)=f\left(3f\left(4f\left(x\right)\right)\right)$ ដែល $f(0)=0$ និង $f'(0)=2$ ។ រក $F'(0)$

74. បើ $F(x)=f\left(xf\left(xf\left(x\right)\right)\right)$ ដែល $f(1)=2, f(2)=3, f'(1)=4, f'(2)=5$ និង

$f'(3)=6$ ។ រក $F'(1)$

75. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=e^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
$y''-4y'+13y=0$

76. តើតម្លៃ r ណាដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $y=e^{rx}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
$y''-4y'+y=0$?

77. រកដេរីវេទី 50 នៃ $y=\cos 2x$ ។

78. រកដេរីវេទី1000 នៃ $f(x)=xe^{-x}$ ។

79. ការផ្លាស់ទីនៃភាគល្អិតមួយនៅលើខ្សែរំញ័រដែលមានសមីការ $s(t)=10+\frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ ដែល s គិតជា

cm និង t គិតជា (s) ។ រកវ៉ិចទ័រល្បឿននៃភាគល្អិតបន្ទាប់ពី t វិនាទី។

80. បើសមីការចលនានៃភាគល្អិតឲ្យដោយសមីការ $s=A\cos(\omega t+\delta)$ ជាចលនាអាម៉ូនិក។
(a) រកវ៉ិចទ័រល្បឿននៅខណៈពេល t

(b) នៅពេលណាដែលវ៉ិចទ័រល្បឿនស្មើសូន្យ ?

81. ក្នុងឧទាហរណ៍ទី៤ចំណុចទី១.៣ យើងមកដល់គំរូសម្រាប់រយៈពេលនៃពន្លឺថ្ងៃ(ក្នុងម៉ោង) ក្នុង
Philadephia លើ t ថ្ងៃនៃឆ្នាំ $L(t)=12+2.8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$

ប្រើគំរូនេះដើម្បីប្រៀបធៀបចំនួនម៉ោងនៃពន្លឺថ្ងៃគឺកើនឡើងក្នុងខែមិនាទី២១និងខែឧសភាទី២១។

82. ចលនានៃរ៉ឺស័រដែលជាកម្មវត្ថុនៃកម្លាំងកកិត ឬកម្លាំងសើម(ដូចជាឧបករណ៍ធក់ក្នុងឡាន)ដែលវាជាគំរូនៃអនុ

គមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស។ ឧបមាថាសមីការចលនានៃចំណុចនៅលើរ៉ឺស័រគឺ

$s(t)=2e^{-1.5t}\sin 2\pi t$ ដែល s គិតជាសង់ទីម៉ែត្រ និង t គិតជាវិនាទី។ រកវ៉ិចទ័រល្បឿនបន្ទាប់ពី t វិនាទី និងទីតាំងនៃក្រាបទាំងពីរ និងវ៉ិចទ័រល្បឿន $0\le t\le 2$ ។

83. ភាគល្អិតមួយផ្លាស់ទីតាមបណ្តោយបន្ទាត់ត្រង់មួយក្រោមបម្លាស់ទី $s(t)$, វ៉ិចទ័រល្បឿន $v(t)$ និងសំទុះ $a(t)$ ។ បង្ហាញថា $a(t)=v(t)\dfrac{dv}{ds}$ ។ ពន្យល់ពីភាពខុសគ្នារវាងអត្ថន័យនៃដេរីវេ $\dfrac{dv}{dt}$ និង $\dfrac{dv}{ds}$ ។

84. ខ្យល់ត្រូវបានបូមទៅក្នុងប៉ោងប៉ោងមួយរាងស្វ៊ែរ។ ខណៈពេល t , មាឌនៃប៉ោងប៉ោងគឺ $V(t)$ និងកាំរបស់វា

គឺ $r(t)$ ។

(a) តើដេរីវេ $\dfrac{dV}{dr}$ និង $\dfrac{dV}{dt}$ តាងឲ្យអ្វី?

(b) បង្ហាញថា $\dfrac{dV}{dt}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\dfrac{dr}{dt}$ ។

85. ឯកតាពន្លឺនៅលើកាមេរ៉ាដំណើរការដោយរក្សាទុកបន្ទុកលើកុងដង់សាទ័រ និងបន្ទុកត្រូវបានបាត់បង់នៅពេល

ដែលយើងបិទកាំម៉េរា។ ទិន្នន័យខាងក្រោមពិពណ៌នាអំពីតម្លៃ Q remaining on the capacitor (គិតជា μC)

នៅខណៈពេលt (គិតជា (s)) ។

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) ប្រើក្រាបខាងលើដើម្បីរកគំរូនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

(b) ដេរីវេ $Q'(t)$ តាងឲ្យចរន្តអគ្គីសនី(គិតជាមីក្រូអំពែ μA) ក្រោមកាប៉ាស៊ីតេនៃអំពូលភ្លើង។

ប្រើចំណុច(a)រួចសន្មតចរន្តខណៈពេល $t=0.04s$ ។ ប្រៀបធៀបលទ្ធផលក្នុងឧទាហរណ៍២ក្នុងចំណុច២.១។

86. គេមានតារាងចំនួនប្រជាជនអាមេរិកចាប់ពីឆ្នាំ1790ដល់1860 ។

Year	Population	Year	Population
1790	3,929,000	1830	12,861,000
1800	5,308,000	1840	17,063,000
1810	7,240,000	1850	23,192,000
1820	9,639,000	1860	31,443,000

(a) ប្រើក្រាបខាងលើដើម្បីរកទិន្ន័យនៃអនុគមន៍អ៊ិស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ក្រាបនៃទិន្ន័យ និងគំរូនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូ។

How good is the fit ?

(b) ប៉ានស្មានអត្រានៃកំណើនចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ1800 និង1850 ដោយ averaging slopes of secant lines.

(c) ប្រើគំរូអនុគមន៍អ៊ិស្ប៉ូណង់ស្យែលក្នុងចំណុច(a) ដើម្បីប៉ានស្មានអត្រានៃកំណើនក្នុងឆ្នាំ1800 និងឆ្នាំ1850។ ប្រៀបធៀបការប៉ានស្មាននេះក្នុងចំណុច(b) ។

(d) ប្រើគំរូនៃអនុគមន៍អ៊ិស្ប៉ូដើម្បីទាយពីចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ1870 ។ ប្រៀបធៀបជាមួយចំនួនប្រជាជនជាក់

ស្តែងចំនួន $38,558,000$ ។ តើអ្នកអាចពន្យល់ពីភាពខុសគ្នាដែរឬទេ?

87. (a) ប្រើ CAS ដើម្បីគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-x+1}{x^4+x+1}}$

(b) តើទីតាំងនៃបន្ទាត់ដេកនៅត្រង់ណានៃក្រាប f ?

(c) ក្រាប f និង f' នៅលើប្លង់តែមួយ។ តើក្រាបរបស់អ្នកផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងចំណុច (b) ឬទេ?

88. ប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ដើម្បីបង្ហាញដេរីវេខាងក្រោម៖

(a) ដេរីវេនៃអនុគមន៍គូគឺជាអនុគមន៍សេស។

(b) ដេរីវេនៃអនុគមន៍សេសគឺជាអុគមន៍គូ។

89. ប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ និងច្បាប់នៃផលគុណដែលអាចបង្ហាញជំនួសច្បាប់នៃផលចែក។

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\left[g(x)\right]^{-1}\right]$$

90. (a) បើ n គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^n x\cos nx\right)=n\sin^{n-1}\cos(n+1)x$

(b) រកទម្រង់នៃដេរីវេនៃ $y=\cos^n\cos nx$ ដូចទៅនឹងចំណុច (a)។

91. ឧបមាថាខ្សែកោង $y=f(x)$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងមិនមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក, ដែល f មាន

ដេរីវេគ្រប់ចំណុច។ សម្រាប់តម្លៃ y គឺជាអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរនៃ y^5 ដែលអាស្រ័យនឹង x ៨០ដង តើអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរនៃ y អាស្រ័យនឹង x ដែរឬទេ?

92. ប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ដើម្បីបង្ហាញថាបើ θ គិតជាដឺក្រេនោះ $\frac{d}{dx}(\sin\theta)=\frac{\pi}{180}\cos\theta$

(នេះជាហេតុផលមួយដែលរ៉ាដ្យង់ត្រូវបានប្រើដើម្បីដោះស្រាយក្នុងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ៖ រូបមន្តដេរីវេគឺមិនងាយស្រួលទេបើយើងប្រើវាក្នុងការគណនាដឺក្រេ)។

93. (a) សរសេរ $|x|=\sqrt{x^2}$ និងប្រើច្បាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ដើម្បីបង្ហាញថា $\frac{d}{dx}|x|=\frac{x}{|x|}$

(b) បើ $f(x)=|\sin x|$។ រក $f'(x)$ និងគូសព្រាងក្រាបនៃ f និង f' ។ តើទីតាំងណាដែល f គ្មានដេ

រីវេ?

94. បើ $y=f(u)$ និង $u=g(x)$ ដែល f និង g គឺជាអុគមន៍ដែលមានដេរីវេ,

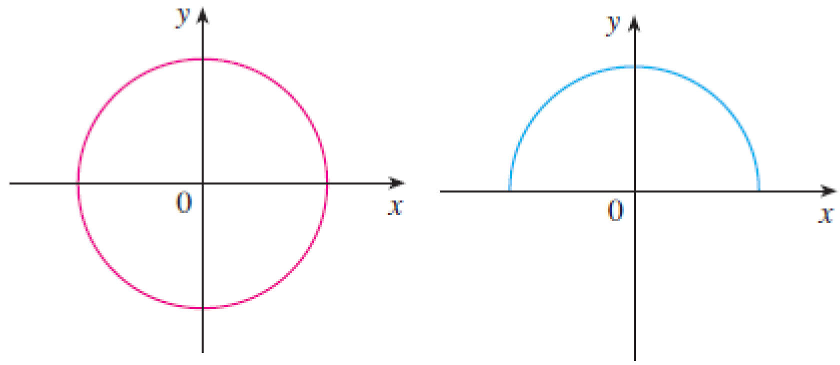
បង្ហាញថា $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$

95. បើ $y=f(u)$និង $u=g(x)$ ដែល f និង g មានដេរីវេទី៣។ ររូបមន្តសម្រាប់ $\frac{d^3y}{dx^3}$

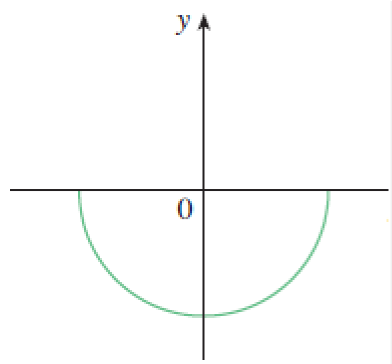
។

៣.៥. ឌីផេរ៉ង់ស្យែល អ៊ីព្លីស៊ីត (Implicit Differentiation)

អនុគមន៍ដែលយើងបានជួបអាចបានបង្ហាញពីអថេរជាក់លាក់មួយដែលទាក់ទងនឹងកន្សោមនៃអថេរផ្សេងទៀត ។ ឧទា. $y=\sqrt{x^3+1}$ ឬ $y=f(x)$ ។ អនុគមន៍មួយចំនួន គឺត្រូវបានកំណត់ជាក់ លាក់ដោយទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដូចជា: (1) $x^2+y^2=25$ ឬ (2) $x^3+y^3=6xy$ ក្នុងករណីមួយចំនួនវាគឺអាចដោះស្រាយសមីការសម្រាប់ y ដែលជាអនុគមន៍ជាក់លាក់ ឬអនុគមន៍ជាច្រើន នៃ x ។ ជាឧទាហរណ៍ បើយើងដោះស្រាយសមីការសម្រាប់ y យើងបាន: $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ ដូច្នេះ អនុគមន៍បានកំណត់ដោយសមីការជាក់លាក់គឺ $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ និង $g(x)=-\sqrt{25-x^2}$ ។ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f និង g គឺនៅខាងលើ និងខាងក្រោមពាក់កណ្ដាលរង្វង់នៃរង្វង់ $x^2+y^2=25$ ។
(មើលរូបមួយ)

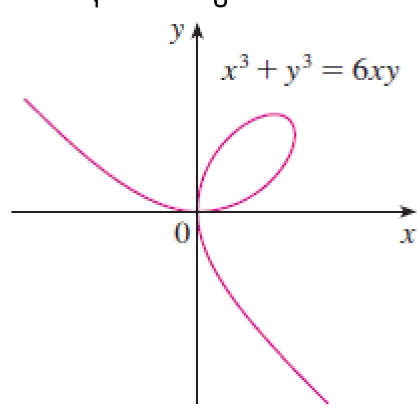


(a) $x^2+y^2=25$ (b) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

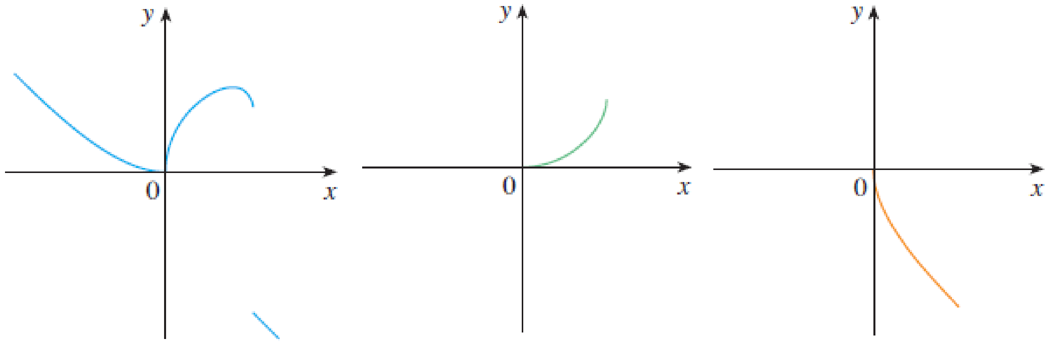


(c) $g(x)=-\sqrt{25-x^2}$

វាមិនមានភាពងាយស្រួលទេដើម្បីដោះស្រាយសមីការ 2 សម្រាប់ y ជាអនុគមន៍នៃ x ដោយដៃ ។ ទោះយ៉ាងណា សមីការ 2 គឺជាសមីការនៃខ្សែកោងហៅថា Folium of Descartes បានបង្ហាញក្នុងរូបទីពីរ ហើយវាកំណត់យ៉ាងជាក់លាក់ជាអនុគមន៍ជាច្រើននៃ x ។



ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍បីខាងក្រោមបង្ហាញក្នុងរូបទីបី ។ ពេលយើងសន្មតថា អនុគមន៍ f បានកំណត់ជាក់លាក់ដោយសមីការ 2 យើងមានន័យថាសមីការ: $x^3+[f(x)]^3=6xf(x)$
គឺពិតសម្រាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃ f ។



យើងមិនត្រូវការដោះស្រាយសមីការ y ជាកន្សោមនៃ x ដើម្បីកំណត់រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ y ទេ ។ ផ្ទុយទៅវិញ យើងអាចប្រើវិធីនៃ ភាពមានដេរីវេជាក់លាក់ ។ នេះជាភាពខុសគ្នានៃដេរីវេអង្គទាំងពីរនៃសមីការដែទាក់ទងនឹង x ហើយបន្ទាប់មកដោះស្រាយសមីការសម្រាប់ y' ។ នៅក្នុង និងឧទាហរណ៍នៅក្នុងផ្នែកនេះ វាត្រូវបានគេសន្មតជានិច្ចថា សមីការដែលគេឲ្យកំណត់ឲ្យថា y ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេនៃ x នោះវិធីសាស្ត្រនៃភាពមានដេរីវេជាក់លាក់ត្រូវបានអនុវត្ត ។

ឧទាហរណ៍ទី១.

$a.$ បើ $x^2+y^2=25$ ។ រកតម្លៃ $\dfrac{dy}{dx}$ ។

$b.$ រកសមីការបន្ទាប់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=25$ នៅត្រង់ចំនុច $(3,4)$ ។

ដំណោះស្រាយទី១

$a.$ ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងសងខាងនៃសមីការ $x^2+y^2=25$

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

ដោយ y ជាអនុគមន៍នៃ x ហើយប្រើច្បាប់បណ្ដាក់ នោះយើងបាន:

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\ 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$b.$ នៅចំនុច $(3,4)$ យើងមាន $x=3$, $y=4$ នោះយើងបាន:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}$$

នោះសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់នៅត្រង់ (3 , 4) គឺ:

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$

$$\Rightarrow\ 3x+4y=25$$

ដំណោះស្រាយ២

b. ដោះស្រាយសមីការ $x^2+y^2=25\ \Rightarrow\ y=\pm\sqrt{25-x^2}$

ចំនុច (3 , 4) ស្ថិតនៅលើពាក់កណ្តាលរង្វង់ខាងលើ $y=\sqrt{25-x^2}$ ហើយពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

ធ្វើដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ដោយប្រើច្បាប់បណ្តាក់ យើងបាន: $f'(x)=\frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(25-x^2)$

$$=\frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$f'(3)=-\frac{3}{\sqrt{25-3^2}}=-\frac{3}{4}$$

ហើយដូចទៅនឹងដំណោះស្រាយទី 1 សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $3x+4y=25$

ចំនាំ 1 ៖ កន្សោម $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ក្នុងដំណោះស្រាយទីមួយ អោយជាដេរីវេក្នុងកន្សោមនៃ x , y ទាំងពីរ ជាឧទាហរណ៍ ចំពោះ $y=f(x)=\sqrt{25-x^2}$ យើងបាន: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

ចំណែកឯ $y=g(x)=-\sqrt{25-x^2}$ យើងបាន: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{-\sqrt{25-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

ឧទាហរណ៍ទី ២.

a. រក y' បើ $x^3+y^3=6xy$

b. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង folium of Descartes $x^3+y^3=6xy$ នៅត្រង់ចំនុច (3 , 3)

c. តើនៅចំនុចណាក្នុងកាដ្រង់ទីមួយគឺជាបន្ទាត់ប៉ះដេក ?

ដំណោះស្រាយ:

a. ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ $x^3+y^3=6xy$ ដោយធៀបទៅនឹង x ហើយ y ជាអនុគមន៍នៃ x ហើយប្រើច្បាប់បណ្តាក់ទៅលើតួ y^3 ហើយនឹងច្បាប់ផលគុណនៅលើតួ $6xy$ យើងបាន:

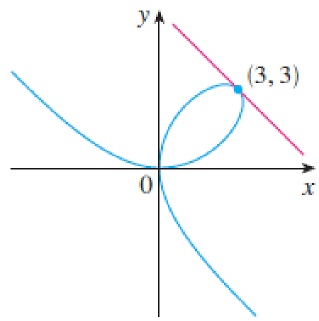
$$3x^2+3y^2y'=6xy'+6y$$

$$x^2+y^2y'=2xy'+2y$$

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$
$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

b. ពេល $x = y = 3$ នោះយើងបាន:

$$y' = \frac{2\times 3 - 3^2}{3^2 - 2\times 3} = -1$$



បើក្រលេកមកមើលរូបទីបួន បញ្ជាក់ថាជាតម្លៃសមហេតុផលមួយចំពោះមេគុណប្រាប់ទិសនៅចំនុច (3 , 3) ។ នោះសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង folium នៅត្រង់ចំនុច (3 , 3) គឺ: $y - 3 = -1(x - 3)$, $x + y = 6$

c. បន្ទាត់ប៉ះគឺដេក បើ $f' = 0$ ។ ប្រើកន្សោម y' ពីផ្នែក *a* នោះយើងបាន:

$$y' = 0 \Rightarrow 2y - x^2 = 0 \ , \ y^2 - 2x \neq 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$$

ជួស $y = \frac{1}{2}x^2$ ក្នុងសមីការខ្សែកោងយើងបាន: $x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

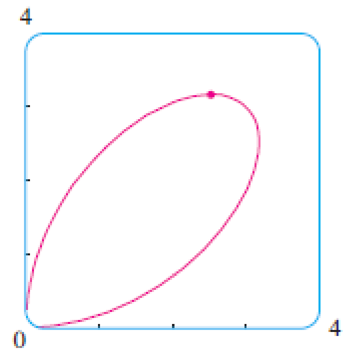
$$x^6 = 16x^3$$

ដោយហេតុថា $x \neq 0$ នៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយ នោះយើងបាន:

$$x^3 = 16$$
$$x = 16^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

នោះយើងបាន: $y = \frac{1}{2}\left(2^{\frac{8}{3}}\right) = 2^{\frac{5}{3}}$

នោះបន្ទាត់ប៉ះគឺដេកនៅត្រង់ចំនុច ($2^{\frac{4}{3}}$, $2^{\frac{5}{3}}$) ដែលតម្លៃប្រហែលទៅនឹង (2.5198 , 3.1748) ។ មើលរូបទីប្រាំនឹងឃើញចម្លើយដ៏សមហេតុផល ។



ចំណាំ២៖

$$y=f(x)=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3+\sqrt{\frac{1}{4}x^6-8x^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3-\sqrt{\frac{1}{4}x^6-8x^3}}$$

$$y=\frac{1}{2}\left[-f(x)\pm\sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3+\sqrt{\frac{1}{4}x^6-8x^3}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3-\sqrt{\frac{1}{4}x^6-8x^3}}\right)\right]$$

ឧទាហរណ៍៣. រក y' បើ $\sin(x+y)=y^2\cos x$

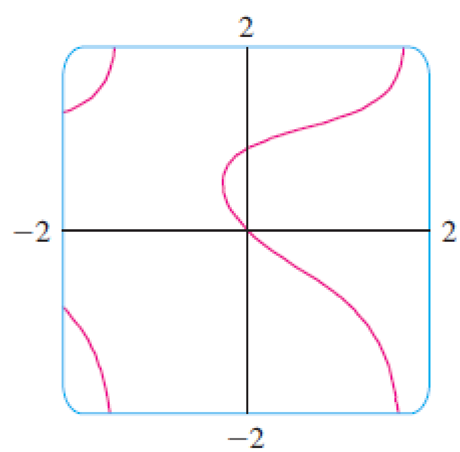
ចម្លើយ

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x និង y ជាអនុគមន៍នៃ x យើងបាន:

$$(1+y')\times\cos(x+y)=y^2(-\sin x)+(\cos x)(2yy')$$

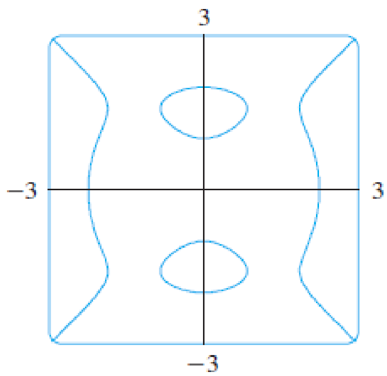
$$\cos(x+y)+y^2\sin x=(2y\cos x)y'-\cos(x+y)\times y'$$

$$y'=\frac{\cos(x+y)+y^2\sin x}{2y\cos x-\cos(x+y)}$$

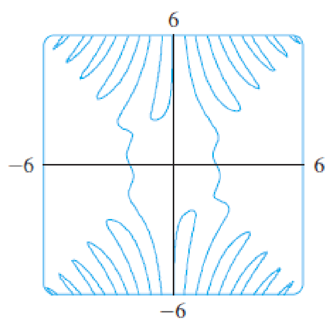


ក្នុងរូបទីប្រាំមួយ បង្ហាញពីផ្នែកនៃខ្សែកោង $\sin(x+y)=y^2\cos x$ ដូចដែលពិនិត្យមើលលើការគណនា យើងឃើញថា $y'=-1$ ពេល $x=y=0$ ហើយវាលេចចេញពីក្រាបដែលមេគុណប្រាប់ទិសគឺប្រហែល -1 នៅត្រង់គល់ O ។

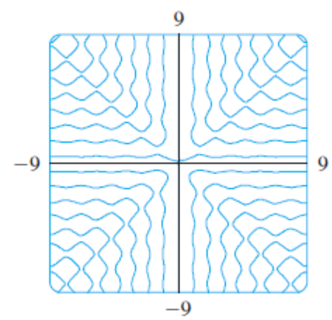
រូបទីប្រាំពីរ ប្រាំបី ប្រាំបួន បង្ហាញពីខ្សែកោងបីបន្ថែមទៀតដែលបង្កើតដោយ Computer Algebra System ជាមួយនឹង implicit-plotting commands។



$(y^2-1)(y^2-4)=x^2(x^2-4)$



$(y^2-1)\sin(xy)=x^2-4$



$y\sin 3x = x\cos 3y$

រាល់ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមបង្ហាញពីរបៀបក្នុងការរកដេរីវេទីពីរនៃអនុគមន៍ដែលត្រូវបានកំណត់ជាក់លាក់ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤. រក y'' បើ $x^4+y^4=16$

ចម្លើយ

ធ្វើដេរីវេលើសមីការជាក់លាក់ដោយធៀបទៅនឹង x យើងបាន:

$$4x^3+4y^3y'=0$$

$$y'=-\frac{x^3}{y^3}$$

ដើម្បីរក y'' យើងត្រូវធ្វើលើដេរីវេលើ y' ដោយប្រើប្រាស់ច្បាប់ផលចែក និង y ជាអនុគមន៍នៃ x ។

$$y''=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)=-\frac{y^3\left(\frac{d}{dx}\right)(x^3)-x^3\left(\frac{d}{dx}\right)(y^3)}{(y^3)^2}$$

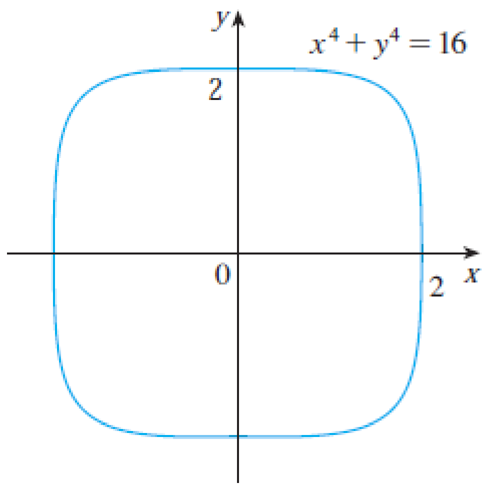
$$=-\frac{y^3\times 3x^2-x^3\times 3y^2y'}{y^6}$$

ជួស $y'=-\frac{x^3}{y^3}$ ក្នុងកន្សោមនេះយើងបាន:

$$y''=-\frac{3x^2y^3-3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$=-\frac{3(x^2y^4+x^6)}{y^7}=-\frac{3x^2(y^4+x^4)}{y^7}$$

តម្លៃ x , y ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅនឹងសមីការ $x^4+y^4=16$ នោះយើងបាន:

$$y''=-\frac{3x^2\times 16}{y^7}=-48\frac{x^2}{y^7}$$



ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ

និយមន័យនៃអនុគមន៍ arcsin $y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow \sin y=x$, $\left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$

ធ្វើដេរីវេលើ $\sin y=x$ ធៀបទៅនឹង x យើងបាន: $\cos y\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$

$\cos y\ge 0$ ដោយហេតុថា $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ ហេតុនេះ

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

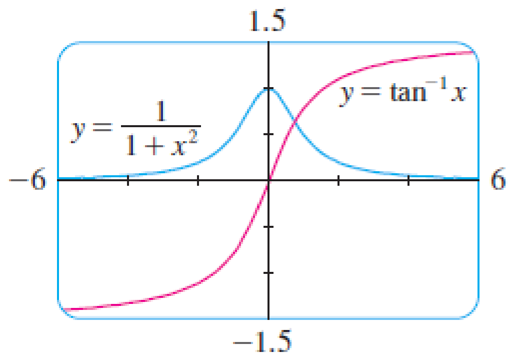
រូបមន្តសម្រាប់ដេរីវេនៃ arctan គឺធ្វើស្រដៀងគ្នាដែរ ។

បើ $y=\tan^{-1}x \Rightarrow x=\tan y$

ធ្វើដេរីវេសមីការចុងក្រោយ ដោយធៀបទៅនឹង x យើងបាន: $\sec^2 y\dfrac{dy}{dx}=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$



ឧទាហរណ៍ទី៥. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍:

$a.\ \ y=\dfrac{1}{\sin^{-1}x}$ $\qquad b.\ \ f(x)=x\arctan\sqrt{x}$

ដំណោះស្រាយ

$$a.\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)^{-1}=-\left(\sin^{-1}x\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$$

$$=-\frac{1}{\left(\sin^{-1}x\right)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$b.\ \ f'(x)=x\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)+\arctan\sqrt{x}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}+\arctan\sqrt{x}$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2}$$

3.5. លំហាត់

$1-4$

a. រកដេរីវេ y' ដោយដេរីវេជាក់លាក់

b. ដោះស្រាយសមីការរក y និងដេរីវេ y' ជាកន្សោមនៃ x

c. ពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកទៅនឹងផ្នែក a និង ផ្នែក b គឺស្របគ្នាដោយការជំនួសកន្សោម y ចូលក្នុងដំណោះស្រាយចំពោះផ្នែក a

1. $9x^2 - y^2 = 1$
2. $2x^2 + x + xy = 1$
3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
4. $\cos x + \sqrt{x} = 5$

$5-20$ រក $\frac{dy}{dx}$ ដោយ implicit differentiation

5. $x^3 + y^3 = 1$
6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$
7. $x^2 + xy - y^2 = 4$
8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$
9. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$
10. $xe^y = x - y$
11. $y\cos x = x^2 + y^2$
12. $\cos(xy) = 1 + \sin y$
13. $4\cos x \sin y = 1$
14. $e^x \sin x = x + xy$
15. $e^{\frac{x}{y}} = x - y$
16. $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$
17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$
18. $x\sin y + y\sin x = 1$
19. $e^y \cos x = 1 + \sin xy$
20. $\tan(x-y) = \frac{y}{1+x^2}$
21. បើ $f(x) + x^2\left[f(x)\right]^3 = 10$ ហើយ $f(1) = 2$ ។ រក $f'(1)$ ។
22. បើ $g(x) + x\sin g(x) = x^2$ ។ រក $g'(0)$ ។

$23-24$ Regard y as the independent variable and x as the dependent variable and use implicit differentiation to find dx/dy

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$
24. $y\sec x = x\tan y$

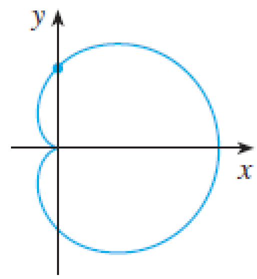
$25-31$ ប្រើប្រាស់ដេរីវេជាក់លាក់ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងនៅចំនុចដែលគេឲ្យ

25. $y = \sin 2x = x\cos 2y$, $\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right)$
26. $\sin(x+y) = 2x - 2y$, (π , π)

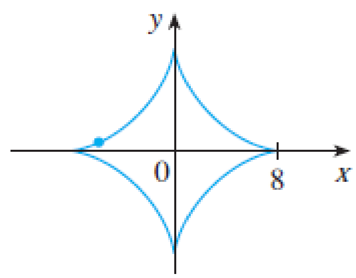
27. $x^2+xy+y^2=3$, $(1,1)$ អេលីប

28. $x^2+2xy-y^2+x=2$, $(1,2)$ អ៊ីពែបូល

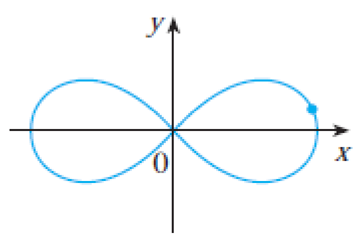
29. $x^2+y^2=\left(2x^2+2y^2-x\right)^2$ $35-38$



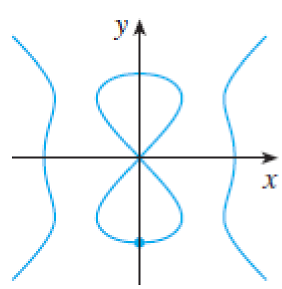
30. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$



31. $2(x^2+y^2)^2=25(x^2-y^2)$



32. $y^2(y^2-4)=x^2(x^2-5)$



33. $a)$ ខ្សែកោងមួយមានសមីការ $y^2=5x^4-x^2$ ត្រូវបានគេហៅថា Kampyle of Eudoxus ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងនេះនៅត្រង់ចំនុច $(1,2)$ ។

$b)$ បង្ហាញពីផ្នែក គូសខ្សែកោង និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៅលើប្លង់ ។

34. $a)$ ខ្សែកោងមួយមានសមីការ $y^2 = x^3 + 3x^2$ ត្រូវបានគេហៅថា Tschirnhausen cubic ។ រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងនេះនៅត្រង់ចំនុច $(1,-2)$

$b)$ តើនៅចំនុចណាដែលខ្សែកោងនេះមានបន្ទាត់ប៉ះដេក ?

$c)$ បង្ហាញពីផ្នែក a និង b ដោយការគូសក្រាហ្វនៃខ្សែកោង និងបន្ទាត់ប៉ះនៅលើប្លង់កូអរដោនេ ។

$35-38$ រកដេរីវេទី២ y'' ដោយ implicit differentiation

35. $9x^2 + y^2 = 9$

36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$

38. $x^4 + y^4 = a^4$

39. បើ $xy + e^y = e$ ។ រកតម្លៃនៃ y'' នៅត្រង់ចំនុចដែល $x = 0$ ។

40. បើ $x^2 + xy + y^3 = 1$ ។ រកតម្លៃនៃ y''' នៅត្រង់ចំនុចដែល $x = 1$ ។

41. Fanciful shapes can be created by using the implicit plotting capabilities of computer algebra systems.

$a.$ ក្រាហ្វនៃខ្សែកោងដែលមានសមីការ $y(y^2-1)(y-2) = x(x-1)(x-2)$ តើមានចំនុចប៉ុន្មានដែលខ្សែកោងនេះមានបន្ទាត់ប៉ះដេក ? ប៉ានស្មានលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃចំនុចទាំងនោះ ។

$b.$ រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងនៅត្រង់ចំនុច $(0,1)$ និង $(0,2)$

$c.$ រកកូអរដោនេនៃ x ជាក់លាក់នៃចំនុចក្នុងផ្នែក a

$d.$ បង្កើតនូវសមីការខ្សែកោងថែមទៀតដោយការកែសមីការក្នុងផ្នែក a ។

42. $a)$ សមីការនៃខ្សែកោង: $2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$ ត្រូវបានគេប្រៀបធៀបទៅនឹងសេះលោត ។ ប្រើប្រព័ន្ធពីជគណិតកុំព្យូទ័រដើម្បីគូសខ្សែកោងនេះ ហើយរកមូលហេតុ ។

$b)$ តើមានចំនុចប៉ុន្មានដែលខ្សែកោងនេះមានបន្ទាត់ប៉ះដេក? រកកូអរដោនេ x នៃចំនុចទាំងនោះ ។

43. រកចំនុចនៅលើ Lemniscate ក្នុងលំហាត់ទី៣១ ដែលបន្ទាត់ប៉ះគឺដេក ។

44. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ នៅត្រង់ចំនុច $(x_0 ; y_0)$ គឺ $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

45. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ នៅត្រង់ចំនុច (x_0 , y_0) ។

46. បង្ហាញថាផលបូកនៃស្កាត់ x និង y នៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ គឺស្មើនឹង c ។

47. បង្ហាញដោយប្រើ implicit differentiation ថាបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំនុច P ទៅនឹងរង្វង់ដែលមានផ្ចិត O គឺកែងទៅនឹងកាំ OP ។

48. ច្បាប់ស្វ័យគុណអាចត្រូវបានបង្ហាញដោយប្រើ Implicit differentiation ចំពោះករណីដែល n ជាចំនួនសនិទាន $n=\dfrac{p}{q}$ ហើយ $y=f(x)=x^n$ ត្រូវបានសន្មតជាមុនដើម្បីជាអនុគមន៍មានដេរីវេ ។ បើ $y=x^{\frac{p}{q}}$ នោះ $y^q=x^p$ ។ ប្រើ Implicit differentiation ដើម្បីបង្ហាញថា: $y'=\dfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

49 – 60. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

49. $y=\left(\tan^{-1}x\right)^2$

50. $y=\tan^{-1}\left(x^2\right)$

51. $y=\sin^{-1}(2x+1)$

52. $g(x)=\sqrt{x^2-1}\sec^{-1}x$

53. $G(x)=\sqrt{1-x^2}\arccos x$

54. $y=\tan^{-1}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$

55. $h(t)=\cot^{-1}t+\cot^{-1}\dfrac{1}{t}$

56. $F(\theta)=\arcsin\sqrt{\sin\theta}$

57. $y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

58. $y=\cos^{-1}\left(\sin^{-1}t\right)$

59. $y=\arccos\left(\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$; $0\le x\le\pi$, $a>b>0$

60. $y=\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

61 – 62. រក $f''(x)$ ហើយពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកគឺសមហេតុផលដោយប្រៀបធៀបក្រាហ្វ f និង f'

61. $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

62. $f(x)=\arctan(x^2-x)$

63. បង្ហាញពីរូបមន្តសម្រាប់ $\left(\dfrac{d}{dx}\right)\left(\cos^{-1}x\right)$ ដោយប្រើវិធីដូចគ្នាសម្រាប់ $\left(\dfrac{d}{dx}\right)\left(\sin^{-1}x\right)$

64. $a)$ វិធីមួយដើម្បីកំណត់ $\sec^{-1}x$ ត្រូវសន្មតជា $y=\sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y=x$ ហើយ $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ ឬ $\pi\le y\le\dfrac{3\pi}{2}$ ។ បង្ហាញនិយមន័យ: $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$b)$ វិធីផ្សេងទៀតនៃការកំណត់ $\sec^{-1}x$ ត្រូវសន្មតជា $y=\sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y=x$ ហើយ $0\le y\le\pi$, $y\ne 0$ ។ បង្ហាញនិយមន័យ: $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

65 – 68. ខ្សែកោងពីរគឺអរតូកូណាល់គ្នា បើសិនជាបន្ទាត់ប៉ះរបស់វាគឺកែងគ្នានៅចំនុចណាមួយនៃចំនុចប្រសព្វនោះ ។ បង្ហាញថាគ្រួសារនៃខ្សែកោងគឺ Orthogonal Trajectories នៃគ្នាទៅវិញទៅមក នោះគឺ

គ្រប់ខ្សែកោងនៅក្នុងគ្រួសារនៃខ្សែកោងមួយគឺអរតូកូណាល់ទៅនឹងគ្រប់ខ្សែកោងនៃគ្រួសារខ្សែកោងផ្សេងទៀត ។ គូររូបនៃគ្រួសារនៃខ្សែកោងទាំងពីរនៅលើអ័ក្សតែមួយ ។

65. $x^2+y^2=r^2$, $ax+by=0$

66. $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=by$

67. $y=cx^2$, $x^2+2y^2=k$

68. $y=ax^3$, $x^2+3y^2=b$

69. បង្ហាញថាសមីការអេលីប $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ហើយសមីការអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ គឺ Orthogonal Trajectories បើ $A^2<a^2$ ហើយ $a^2-b^2=A^2+B^2$ (ហេតុនេះ អេលីប និងអ៊ីពែបូលមានកំណុំដូចគ្នា)

70. រកតម្លៃនៃចំនួន a ដែលគ្រួសារនៃខ្សែកោង $y=(x+c)^{-1}$ និង $y=a(x+k)^{\frac{1}{3}}$ គឺ Orthogonal Trajectories.

71. $a)$ សមីការ Van Der Waals ចំពោះចំនួន n ម៉ូល នៃឧស្ម័នគឺ $\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$ ដែល P ជាសម្ពាធ , V ជាមាឌ, T ជាសីតុណ្ហភាពនៃឧស្ម័ន , R ជាថេរសកលនៃឧស្ម័ន , ចំនួនថេរ a , b ។ បើ T នៅតែថេរ ប្រើ implicit differentiation ដើម្បីរក $\frac{dV}{dP}$ ។

$b)$ រកអត្រាប្រែប្រួលនៃមាឌដែលអាស្រ័យនឹងសម្ពាធមួយម៉ូលនៃកាបូនឌីអុកស៊ីតដែលមានមាឌ $V=10\ l$ ហើយមានសម្ពាធ $P=2.5\ atm$ ។ ប្រើ $a=3.592\ L^2-atm/mole^2$ ហើយ $b=0.04267\ L/mole$ ។

72. $a)$ ប្រើ implicit differentiation ដើម្បីរក y' បើសិន $x^2+xy+y^2+1=0$

$b)$ គូសខ្សែកោងក្នុងផ្នែក a តើអ្នកឃើញអ្វី? បង្ហាញថាអ្វីដែលអ្នកឃើញគឺត្រឹមត្រូវ ។

$c)$ ក្នុងផ្នែក b តើអ្នកអាចសន្និដ្ឋានដូចម្តេចចំពោះកន្សោម y' ដែលបានរកឃើញក្នុងផ្នែក a?

73. សមីការ $x^2-xy+y^2=3$ តំនាងអោយ អេលីបវង្វិល ដែលអេលីបមួយដែលអ័ក្សនោះមិនស្របទៅនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។ រកចំនុចដែលអេលីបនេះកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសនេះ ហើយបង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំនុចទាំងនេះគឺស្របគ្នា ។

74. a តើទីតាំងណាដែលបន្ទាត់កែងទៅនឹងអេលីប $x^2-xy+y^2=3$ នៅត្រង់ចំណុច $(-1,1)$ កាត់ទៅនឹងអេលីបនោះជាលើកទីពីរ?

$b)$ បង្ហាញពីផ្នែក a ដោយការគូសក្រាហ្វអេលីប និងបន្ទាត់កែង ។

75. រកគ្រប់ចំនុចទាំងអស់លើខ្សែកោង $x^2y^2+xy=2$ ដែលមេគុណប្រាប់ទិសនៃសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ -1 ។

76. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរទៅនឹងអេលីប $x^2+4y^2=36$ ដែលកាត់ចំនុច $(12,3)$ ។

77. $a)$ សន្មតថា f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេមួយទល់មួយ ហើយអនុគមន៍ច្រាសរបស់វាគឺ f^{-1} ក៏មានដេរីវេដែរ ។ ប្រើ implicit differentiation ដើម្បីបង្ហាញថា: $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ ដែលភាគបែងខុសពីសូន្យ ។

78. $a)$ បង្ហាញអនុគមន៍ $f(x)=x+e^x$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ។

$b)$ តើតម្លៃនៃ $f^{-1}(1)$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

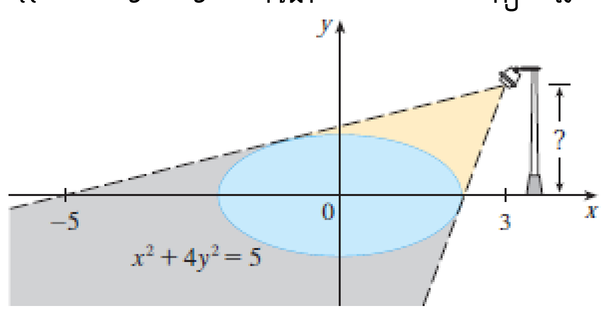
$c)$ ប្រើប្រាស់រូបមន្តពីលំហាត់ $77(a)$ ដើម្បីរកតម្លៃ $\left(f^{-1}\right)'(1)$ ។

79. អនុគមន៍បេសេលនៃលំដាប់សូន្យ , $y=J(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy''+y'+xy=0$ សម្រាប់គ្រប់តម្លៃនៃ x ហើយតម្លៃរបស់វានៅត្រង់ 0 គឺ $J(0)=1$ ។

$a.$ រកតម្លៃ $J'(0)$

$b.$ ប្រើ implicit differentiation ដើម្បីរក $J''(0)$ ។

80. រូបខាងក្រោមនេះបង្ហាញពីចង្កៀងមួយដែលមានទីតាំងបីឯកតាទៅខាងស្តាំនៃអ័ក្សអរដោនេ y ហើយស្រមោលរបស់វាបានបង្កើយជារាងអេលីប $x^2+4y^2\le 5$ ។ បើចំនុច $(-5,0)$ គឺនៅលើគែមនៃស្រមោលនោះ តើអ័ក្ស x ស្ថិតនៅចម្ងាយឆ្ងាយប៉ុណ្ណាពីទីតាំងនៃចង្កៀងភ្លើងនោះ?



គម្រោងពិសោធន៍ (Laboratory Project)

នៅក្នុងគម្រោងនេះ អ្នកនឹងស្វែងយល់ពីការផ្លាស់ប្តូររាងនៃខ្សែកោងដែលបានកំណត់យ៉ាងជាក់លាក់នៅពេលដែលអ្នកផ្លាស់ប្តូរចំនួនថេរនៅក្នុងគ្រួសារនៃខ្សែកោងនោះ ហើយកំណត់ថាតើលក្ខណៈណាមួយដែលមានលក្ខណៈធម្មតាសម្រាប់សមាជិកនៃគ្រួសារខ្សែកោងនោះ ។

1) ពិនិត្យពីគ្រួសារនៃខ្សែកោង $y^2-2x^2(x+8)=c\left[(y+1)^2(y+9)-x^2\right]$

a) ដោយគូសក្រាហ្វនៃខ្សែកោងនៅត្រង់ $c=0$, $c=2$ ហើយកំណត់ថាតើមានប៉ុន្មានចំនុចដែលប្រសព្វ? (អ្នកត្រូវពង្រីកវាដើម្បីរកវា)

b) ឥលូវបន្ថែមនូវខ្សែកោងដែល $c=5$, $c=10$ ទៅក្នុងក្រាហ្វរបស់អ្នកនៅក្នុងផ្នែក a ? តើអ្នកកត់ចំនាំឃើញអ្វី? តើតម្លៃ c មានអ្វីផ្សេងទៀត?

2) *a.* ក្រាហ្វនៃសមាជិកជាច្រើននៃគ្រួសារខ្សែកោង $x^2+y^2+cx^2y^2=1$ ។ រៀបរាប់ពីរបៀបដែលក្រាហ្វផ្លាស់ប្តូរនៅពេលដែលអ្នកប្តូរតម្លៃ c ។

b. តើមានអ្វីកើតឡើងចំពោះខ្សែកោង ពេលដែល $c=-1$? រៀបរាប់អ្វីដែលលេចឡើងនៅលើស្រ្គីន ។ តើអ្នកអាចបញ្ជាក់វាបានទេ?

c. រកតម្លៃ y' ដោយប្រើ ដេរីវេជាក់លាក់ ។ ចំពោះ $c=-1$ តើកន្សោម y' ដូចគ្នាទៅនឹងអ្វីដែលអ្នកបានរកឃើញនៅក្នុងផ្នែក b ឬទេ ?

3.6 លំហាត់

2.22 . គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

2. $f(x)=x\ln x-x$

4. $f(x)=\ln(\sin^2 x)$

3. $f(x)=\sin(\ln x)$

6. $y=\dfrac{1}{\ln x}$

5. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x}$

8. $f(x)=\log_5(xe^x)$

7. $f(x)=\log_{10}(x^3+1)$

10. $f(u)=\dfrac{u}{1+\ln u}$

9. $f(x)=\sin x\ln(5x)$

12. $h(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

11. $g(x)=\ln(x\sqrt{x^2-1})$

14. $g(r)=r^2\ln(2r+1)$

13. $G(y)=\ln\dfrac{(2y+1)^5}{\sqrt{y^2+1}}$

16. $y=\ln|1+t-t^3|$

15. $F(s)=\ln\ln s$

18. $y=\ln|\cos(\ln x)|$

17. $y=\tan[\ln(ax+b)]$

20. $H(z)=\ln\sqrt{\dfrac{a^2-z^2}{a^2+z^2}}$

19. $y=\ln(e^x+xe^{-x})$

22. $y=\log_2(e^{-x}\cos\pi x)$

21. $y=2x\log_{10}\sqrt{x}$

23-26 គណនា $y'\&y''$

23. $y = x^2 \ln(2x)$ 24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 26. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

$27-30$ គណនាដេរីវេនៃ f និង រកដែនកំណត់នៃ f

27. $f(x) = \dfrac{x}{1-\ln(x-1)}$ 28. $f(x) = \sqrt{2+\ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ 30. $f(x) = \ln\ln\ln x$

31. បើ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$; រកតម្លៃនៃ $f'(1)$

32. បើ $f(x) = \ln(1+e^{2x})$; រកតម្លៃនៃ $f'(0)$

$33-34.$ រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំនុចដូចខាងក្រោម:

33. $y = \ln(x^2 - 3x+1)$; $(3,0)$

34. $y = x^2 \ln x$; $(1,0)$

35. បើ $f(x) = \sin x + \ln x$; រកតម្លៃ $f'(x)$ ។ ពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកដោយប្រៀបធៀបក្រាហ្វ $f \,\&\, f'$ ។

36. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $y = \dfrac{\ln x}{x}$ នៅត្រង់ចំនុច $(1,0) \& \left(e; \dfrac{1}{e}\right)$ ។ ពន្យល់ពីខ្សែកោងនោះ និងគូសបន្ទាត់ប៉ះរបស់វា ។

37. តាង $f(x) = cx + \ln(\cos x)$ ។ រកតម្លៃ c បើ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 6$

38. តាង $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$ ។ រកតម្លៃ a បើ $f'(1) = 3$ ។

$39-50.$

39. $y = (x^2+2)^2(x^4+4)^4$ 40. $y = \dfrac{e^{-x}\cos^2 x}{x^2+x+1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4-1}}$ 42. $y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{\frac{2}{3}}$

43. $y = x^x$ 44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\sin x}$ 46. $y = \sqrt{x^x}$

47. $y = (\cos x)^x$ 48. $y = (\sin x)^{\ln x}$

49. $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$ 50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. រក y' បើ $y = \ln(x^2 + y^2)$

52. រក y' បើ $x^y = y^x$
53. រកដេរីវេទី n នៃ $f^n(x)$ បើ $f(x)=\ln(x-1)$
54. រក $\frac{d^9}{dx^9}(x^9\ln x)$
55. ប្រើប្រាស់និយមន័យនៃដេរីវេ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
56. បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x ;\forall x>0$

១.៥. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

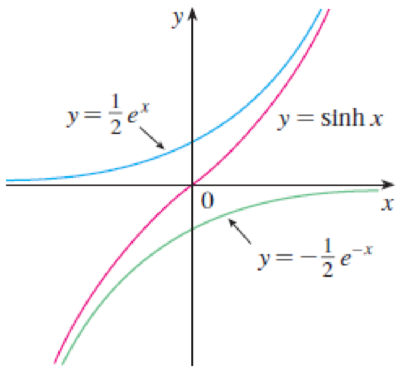
បន្សំគូ និងសេសនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^x និង e^{-x} កើតឡើងជាញឹកញាប់ក្នុងគណិតវិទ្យា ហេតុនេះទើបសមទទួលនឹងទទួលនឹងបាននូវឈ្មោះពិសេស ។ ពួកវាមានលក្ខណស្រដៀងគ្នាទៅនឹងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ហើយវាក៏មានទំនាក់ទំនងដូចទៅនឹងអ៊ីពែបូលដែលអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមានរង្វង់ ។

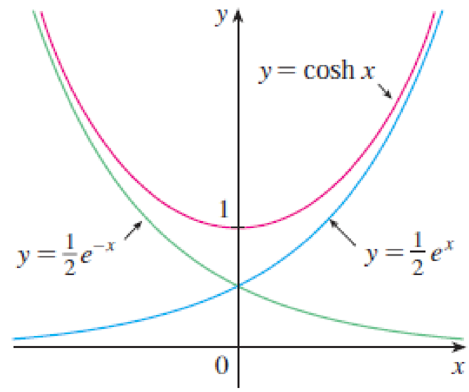
ដោយសារហេតុផលទាំងនេះទើបគេហៅថា អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក ($Hyperbolic\ Functions$) ។

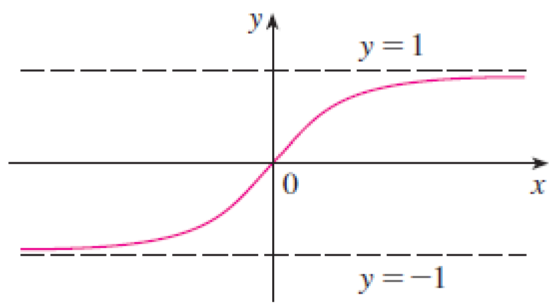
និយមន័យនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

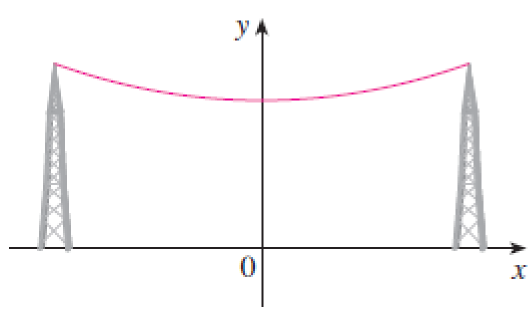
ក្រាហ្វខាងក្រោមបង្ហាញពីអនុគមន៍កូស៊ីនីសអ៊ីពែបូលិក និង ស៊ីនីសអ៊ីពែបូលិក និង តង់សង់អ៊ីពែបូលិក ដូចបង្ហាញក្នុងរូបខាងក្រោម:

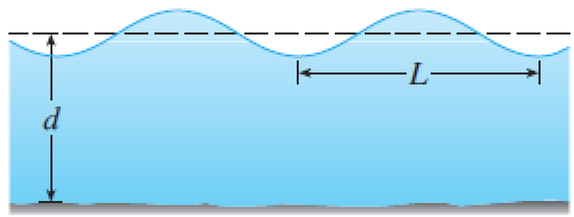






ចំណាំថា: sinh មានដែនកំណត់ $\mathbb{R}$ និងមានរូបភាព $\mathbb{R}$ ហើយ cosh មានដែនកំណត់ $\mathbb{R}$ និងរូបភាព $[1;+\infty]$ ។ ក្រាហ្វនៃ tanh បង្ហាញនៅរូបទី ៣ ។ វាមានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\pm 1$ មើលលំហាត់ទី២៣ ខ្លះៗនៃគណិតវិទ្យាប្រើប្រាស់អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកដែលនឹងបង្ហាញនៅក្នុងជំពូកទី 7 ៕





សញ្ញាណនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក
$\sinh(-x) = -\sinh x$ $\qquad\qquad$ $\cosh(-x) = \cosh x$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$
$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

៤១. បង្ហាញថា:

$a. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$b. 1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$

ដំណោះស្រាយ:

$$a. \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

$b.$ តាម a យើងបាន:

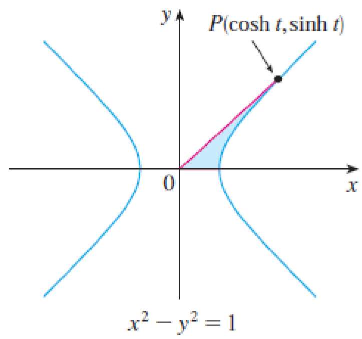
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$$

របៀបមួយទៀត:

បើ t ជាចំនួនពិតណាមួយ ហើយចំនុច $P(\cos t;\sin t)$ ដែលស្ថិតលើរង្វង់ឯកតាដែលហៅថា $x^2+y^2=1$ ដោយសារតែ $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ ។ ជាការពិត t អាចត្រូវបានបកស្រាយថាជារង្វាស់កាំនៃ $\angle POQ$ ក្នុងរូបទី ៦ ។



ដោយហេតុផលនេះ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រត្រូវបានគេហៅថា អនុគមន៍រង្វង់ (Circular Function) ដូចគ្នានេះដែរ បើ t ជាចំនួនពិតណាមួយ ហើយចំនុច $P(\cosh t;\sinh t)$ ដែលស្ថិតនៅលើអ័ក្សខណ្ឌចែកខាងស្តាំ (right branch) នៃសមីការអ៊ីពែបូល $x^2-y^2=1$ ដោយសារតែ $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ ដែល $\cosh t\geq 1$ ។ លើកនេះ t មិនបានតំនាងអោយរង្វាស់នៃមុំ ។

ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកដែលអាចគណនាដោយស្រួល ។

ឧ. $\dfrac{d}{dx}(\sinh x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$ ។

តារាងខាងក្រោម បង្ហាញពីដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

(1) ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

$$\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x)=-\operatorname{csch} x\coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x)=-\operatorname{sech} x\tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x)=\operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x)=-\operatorname{csch}^2 x$$

ឧ២. យើងអាចគណនាដោយបើក្បួនបណ្តាក់

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh\sqrt{x}\right)=\sinh\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{\sinh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស

ពិនិត្យមើលរូបទី 1 & 3 ដែល $\sinh$ និង $\tanh$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ដូច្នេះហើយវាមានអនុគមន៍ច្រាសដែលតាងដោយ $\sinh^{-1}$ និង $\tanh^{-1}$ ។ រូបទី២ បង្ហាញថា $\cosh$ មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ

តែពេលវាមានដែនកំណត់ $[0,\infty]$ វាក៏ក្លាយជាអនុគមន៍មួយទៅមួយ ។ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកកូស៊ីនីសប្រាស គឺកំណត់ភាពប្រាសនៃដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

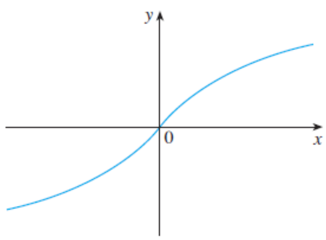
(2) លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ប្រាស

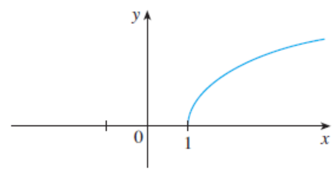
$$y=\sinh^{-1}x \Rightarrow \sinh y = x$$

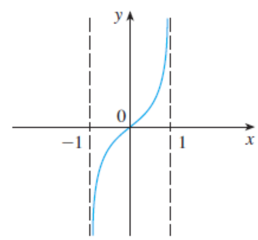
$$y=\cosh^{-1}x \Rightarrow \cosh y = x \quad ; y\geq 0$$

$$y=\tanh^{-1}x \Rightarrow \tanh y = x$$

យើងអាចគូសក្រាហ្វនៃ $\sinh^{-1}$,$\cosh^{-1}$,$\tanh^{-1}$ ក្នុងរូបទី ៨ ទី៩ ទី១០ ដោយប្រើរូបទី ១ ទី២ ទី៣







អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកគឺកំណត់ក្នុងទម្រង់ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ហើយវាក៏មិនចម្លែកដែរដែលអនុគមន៍ប្រាសអ៊ីពែបូលិកកំណត់ក្នុងទម្រង់ជាអនុគមន៍ឡូការីតនោះ ។

យើងបានតារាង

$$(3)\quad \sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);\ x\in\mathbb{R}$$

$$(4)\quad \cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);\ x\geq 1$$

$$(5)\quad \tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right);\ -1<x<1$$

៤. បង្ហាញថា $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ដំណោះស្រាយ:

តាង $y=\sinh^{-1}x$

យើងបាន: $x=\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$$\Rightarrow e^y-2x-e^{-y}=0$$

$$\Rightarrow e^{2y}-2xe^y-1=0$$

$$\Rightarrow \left(e^y\right)^2-2xe^y-1=0$$

តាម $\Delta = b^2 - 4ac = (-2x)^2 - 4(1)(-1) = 4x^2 + 4$

យើងបាន $e^y = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

ចំពោះ $e^x > 0$ តែ $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ ពីព្រោះ $x < \sqrt{x^2+1}$

យើងបាន៖ $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

$$\Rightarrow y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

មើលលំហាត់ទី២៥ សម្រាប់របៀបផ្សេងទៀត

(6) ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស

$\dfrac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\dfrac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$

៦៤. បង្ហាញថា $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ដំណោះស្រាយ:

ទី១

តាង $y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y$

ធ្វើដេរីវេសមីការនេះធៀបនឹង x គេបាន:

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

ដោយ $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ ហើយ $\cosh y \geq 0$ នោះ $\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$

នោះ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cosh y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ទី២

ពីសមីការ ៣ ដូចបង្ហាញក្នុងឧទាហរណ៍ទី ៣

យើងបាន $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \dfrac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

៥៥. រកតម្លៃ $\frac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\sin x)\right]$

ដំណោះស្រាយ

ប្រើប្រាស់តារាងលេខ ៦ និងលក្ខណៈបណ្តាក់នោះ យើងបានៈ

$$\frac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\sin x)\right] = \frac{1}{1-(\sin x)^2} \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= \frac{1}{1-\sin^2 x}\cos x$$
$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$

លំហាត់

$1-6$ រកតម្លៃលេខនៃកន្សោមខាងក្រោមៈ

1.$(a)\sinh 0$ $(b)\cosh 0$

2.$(a)\tanh 0$ $(b)\tanh 1$

3.$(a)\sinh(\ln 2)$ $(b)\sinh 2$

4.$(a)\cosh 3$ $(b)\cosh(\ln 3)$

5.$(a)\operatorname{sech} 0$ $(b)\cosh^{-1} 1$

6.$(a)\sinh 1$ $(b)\sinh^{-1} 1$

$7-19$ បង្ហាញលក្ខណៈខាងក្រោមៈ

7. $\sinh(-x) = -\sinh x$ នេះបង្ហាញថា sinh ជាអនុគមន៍សេស

8. $\cosh(-x) = \cosh x$ នេះបង្ហាញថា cosh ជាអនុគមន៍គូ

9. $\cosh x + \sinh x = e^x$

10. $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

11. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x + \sinh y$

12. $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

13. $\coth^2 x-1=\operatorname{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

15. $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

16. $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

17. $\tanh(\ln x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=e^{2x}$

19. $(\cosh x+\sinh x)^n=\cosh nx+\sinh nx$ (n ជាចំនួនពិតណាមួយ)

20. បើ $\tanh x=\dfrac{12}{13}$ រកតម្លៃនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្សេងទៀត ។

21. បើ $\cosh x=\dfrac{5}{3}$; $x>0$ រកតម្លៃនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្សេងទៀតនៅត្រង់ x ។

22.

(a). ប្រើប្រាស់ក្រាបនៃ $\sinh$; $\cosh$; $\tanh$ នៅលើរូបទី ១ ដល់ ៣ ដើម្បីគូសក្រាហ្វនៃ

csch ; sech ; $\coth$

(b). ពិនិត្យក្រាហ្វដែលអ្នកបានគូសក្នុងផ្នែក a ដោយប្រើប្រាស់ graphing device to produce them

23. ប្រើប្រាស់និយមន័យនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកដើម្បីរកលីមីតខាងក្រោម:

$a.\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$ $\quad$ $b.\lim\limits_{x\to-\infty}\tanh x$

$c.\lim\limits_{x\to\infty}\sinh x$ $\quad$ $d.\lim\limits_{x\to-\infty}\sinh x$

$e.\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sech} x$ $\quad$ $f.\lim\limits_{x\to\infty}\coth x$

$g.\lim\limits_{x\to0^+}\coth x$ $\quad$ $h.\lim\limits_{x\to0^-}\coth x$

$i.\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{csch} x$

24. ប្រើប្រាស់រូបមន្តដែលឲ្យក្នុងតារាង ១ ដើម្បីដេរីវេនៃអនុគមន៍

$a.\cosh$ $\quad$ $b.\tanh$ $\quad$ $c.\operatorname{csch}$ $\quad$ $d.\operatorname{sech}$ $\quad$ $e.\coth$

25. ផ្តល់នូវដំណោះស្រាយមួយផ្សេងទៀត ដោយតាង $y=\sinh^{-1}x$ ហើយប្រើប្រាស់លំហាត់ទី៩ និង ឧ.$1(a)$ ដោយជំនួស x ដោយ y

26. បង្ហាញសមីការ 4 ពិត

27. បង្ហាញសមីការ 5 ដោយប្រើប្រាស់:

$a.$ វិធីសាស្រ្តក្នុងឧទាហរណ៍ទី ៣

$b.$ លំហាត់ទី ១៨ ដោយជំនួស x ដោយ y

28. ចំពោះអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមៈ

- អោយនិយមន័យដូចក្នុងសមីការ 2
- គូសក្រាហ្វវា
- រករូបមន្តដូចទៅនឹងសមីការ 3

$a. \operatorname{csc}h^{-1}$ $b. \operatorname{sech}^{-1}$ $c. \coth^{-1}$

29. បង្ហាញថារូបមន្តដែលមានក្នុងសមីការ 6

$a.\ \cosh^{-1}$ $b.\ \tanh^{-1}$ $c.\ \operatorname{csch}^{-1}$

$d.\ \operatorname{sech}^{-1}$ $e.\ \coth^{-1}$

$30-45$ រកដេរីវេ និងសម្រួល

30. $f(x)=\tanh\left(1+e^{2x}\right)$

31. $f(x)=x\sinh x-\cosh x$

32. $g(x)=\cosh(\ln x)$

33. $h(x)=\ln(\cosh x)$

34. $y=x\coth\left(1+x^2\right)$

35. $y=e^{\cosh 3x}$

36. $f(t)=\operatorname{csch} t\left(1-\ln\operatorname{csch} t\right)$

37. $f(t)=\operatorname{sech}^2\left(e^t\right)$

38. $y=\sinh(\cosh x)$

39. $G(x)=\dfrac{1-\cosh x}{1+\cosh x}$

40. $y=\sinh^{-1}(\tan x)$

41. $y=\cosh^{-1}\sqrt{x}$

42. $y=x\tanh^{-1}x+\ln\sqrt{1-x^2}$

43. $y=x\sinh^{-1}\dfrac{x}{3}-\sqrt{9+x^2}$

44. $y=\operatorname{sech}^{-1}\left(e^{-x}\right)$

45. $y=\coth^{-1}(\sec x)$

ឯកសារយោង

- James Steward, Calculus early transcendental 7e, 2012
- សៀវភៅសិក្សាគោលមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ដល់ទី១២របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
- William Briggs, Calculus for Scientists and Engineers,University of Colarado, Denver.
- Edwin J. Prucell, Calculus with Analytic Geometry Fifth Edition, University of Arizona.